МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
СУМСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ВИЩА МАТЕМАТИКА

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

У ТРЬОХ ЧАСТИНАХ

ЧАСТИНА 1

$$L(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

Суми
Видавництво СумДУ
2009

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
СУМСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ВИЩА МАТЕМАТИКА

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

для студентів економічних спеціальностей
денної, заочної та вечірньої форм навчання

У ТРЬОХ ЧАСТИНАХ

ЧАСТИНА 1

Затверджено
на засіданні кафедри
прикладної математики і
механіки як конспект
лекцій з дисципліни
„Вища математика”.
Протокол № 5 від 23.12.2008 р.

Суми
Видавництво СумДУ
2009

Конспект лекцій з дисципліни «Вища математика»: У 3 частинах /Укладач О.І. Оглобліна. – Суми: Вид-во СумДУ, 2009. – Ч.1. – 210 с.

Кафедра прикладної математики і механіки

Зміст С.

ВСТУП

Дисципліна “Вища математика” для економістів включає розділи вищої математики, вивчення яких дає математичний апарат, що найбільш активно застосовується для розв’язання прикладних економічних і управлінських задач. Це лінійна алгебра, елементи аналітичної геометрії та математичний аналіз.

У розділі “Лінійна алгебра” основна увага приділяється матрицям, визначникам і системам лінійних алгебраїчних рівнянь, оскільки в економічних дослідженнях широко використовуються різні матричні моделі – **модель міжгалузевого балансу, моделі транспортних перевезень, моделі керування чергами** й т. ін. Лінійні моделі, які зводяться до систем лінійних алгебраїчних рівнянь або нерівностей, з досить високою точністю відповідають описуваним ними явищам. За допомогою цих моделей вирішується багато управлінських задач.

Математичний аналіз дає ряд фундаментальних понять, якими оперує економіст – **функція, границя, похідна, інтеграл, числовий та функціональний ряди, диференціальне рівняння**. Наприклад, **друга чудова границя** застосовується для розв’язання задач про **ріст банківського внеску за законом складних відсотків**; використання поняття похідної необхідно у такій спеціальній дисципліні, як **граничний аналіз в економіці** й т. ін.

Але перед тим, як перейти до вивчення нового мате-ріалу, систематизуємо ваші знання, які будуть нам необхідні надалі.

УМОВНІ ОЗНАКИ, ЯКІ БУДУТЬ ЗАСТОСОВУВАТИСЯ У ЛЕКЦІЯХ:

Знак $\forall$ – заміняє фразу “Для будь - якого”

$\exists$ – “Існує”

$\exists!$ – “існує і єдиний”

Якщо (А, В – будь - які твердження), то

А $\Rightarrow$ В – з А випливає В, необхідна умова теореми

А $\Leftarrow$ В – з В випливає А, достатня умова теореми

А $\Leftrightarrow$ В – слідування в обидві боки, необхідна і достатня умова теореми.

$\in$ – “належить”; $\notin$ - “не належить”

$\subset$ – “входить”

$\subseteq$ – “ не входить”

$\cup$ – “операція об’єднання”

$\cap$ – „операція перетину”

$\{\varnothing\}$ – порожня множина.

РОЗДІЛ 1
ДЕЯКІ ВІДОМОСТІ З ШКІЛЬНОЇ АЛГЕБРИ ТА ФІНАНСОВОЇ АРИФМЕТИКИ

§ 1 ДІЙСНІ ЧИСЛА R

а) Натуральні числа. Виникли як інструмент для рахування предметів. Множина таких чисел позначається $\boldsymbol{N}$. Приклад – 1, 2, 3, ...

Для натуральних чисел визначені 2 операції:

■ якщо $a \in N$ і $b \in N$, то $c = a + b \in N$ – ***додавання.*** Причому

1. $a + b = b + a$ – комутативність
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ – асоціативність

■ якщо $a \in N$ і $b \in N$, то $c = a * b \in N$ – ***множення***. Причому

3. $a * b = b * a$ – комутативність
4. $(a * b) * c = a * (b * c)$ – асоціативність

між двома операціями діє закон ***дистрибутивності***:

5. $a * (b + c) = a * b + a * c$.

б) Цілі числа. Розширення множини $\boldsymbol{N}$**.** Виникли як інструмент для віднімання більшого числа від меншого**.** Множина таких чисел – $\boldsymbol{Z}$. Набувають значень $0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; ...$

$\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z}$. На множині $\boldsymbol{Z}$ існують операції додавання і множення, задані так, як і на множині $\boldsymbol{N}$.

У множині цих чисел існує єдиний розв’язок $x \in Z$ рівняння $a + x = b$:

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$ – *різниця.* Операція отримала назву ***віднімання.***

Визначилося число 0: $\boldsymbol{a} + 0 = \boldsymbol{a}$ – ***нейтральний елемент по відношенню до додавання***. Різниця $0 - \boldsymbol{a}$ позначається $-\boldsymbol{a}$.

Нейтральним елементом по відношенню до множення є число 1, оскільки $\forall \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{1} = \boldsymbol{a}$.

в) Раціональні числа. Позначення – $\boldsymbol{Q}$. Набувають значень $\boldsymbol{m}/\boldsymbol{n}$, де $\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\in \boldsymbol{Z}$

$\boldsymbol{Z}\subset \boldsymbol{Q}$**.** На множині $\boldsymbol{Q}$ існують операції додавання і множення, задані так, як і на множині $\boldsymbol{Z}$.

У множині цих чисел існує єдиний розв’язок $x\in Q$ рівняння $\boldsymbol{b}\times \boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$ за умови $\boldsymbol{b}\neq 0$: $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}/\boldsymbol{b}$ – ***відношення.*** Операція отримала назву ***ділення.***

Розв’язком рівняння $\boldsymbol{a}\times \boldsymbol{x}=\mathbf{1}(\boldsymbol{a}\neq \mathbf{0})$ буде число $\boldsymbol{x}=1/\boldsymbol{a}$ – число, ***обернене до а.***

г) Ірраціональні числа. Позначення – $\boldsymbol{I}$ **.**

Набувають значення нескінчених неперіодичних десяткових дробів. Для ірраціональних чисел існують операції додавання, віднімання, множення та ділення, задані за тими ж самими правилами.

Завжди вірно твердження: якщо $\boldsymbol{x}\in \boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{y}\in \boldsymbol{I}$ (або навпаки), то

$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{x}\pm \boldsymbol{y},\boldsymbol{d}=\boldsymbol{x}\times \boldsymbol{y}$ та $\boldsymbol{e}=\boldsymbol{x}/\boldsymbol{y}$ – завжди ірраціональні числа, тобто $\boldsymbol{c}\in \boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{d}\in \boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{e}\in \boldsymbol{I}$.

д) Дійсні числа. Позначення – $\boldsymbol{R}$.

$\boldsymbol{Q}\cup \boldsymbol{I}=\boldsymbol{R}$.

Отже, довільне дійсне число повинно задовольняти вимогам, які наводилися для всіх інших класів чисел. Крім того,

■ має місце співвідношення $\boldsymbol{a}>\boldsymbol{b}(\text{або}\,\boldsymbol{b}<\boldsymbol{a})$, якщо $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ – ***додатне.***

■ якщо $\boldsymbol{a}$ – ***від’ємне,*** то $(-\boldsymbol{a})$ – ***додатне.***

■ $\forall a>0,\, a\in R$ знайдеться таке $\boldsymbol{r}>0,\boldsymbol{r}\in \boldsymbol{Q}:\boldsymbol{r}<\boldsymbol{a}$.

Означення 1

Абсолютною величиною |a| дійсного числа a називається:

■ саме $\boldsymbol{a}$ – якщо воно додатне;

■ $-\boldsymbol{a}$ – якщо воно від’ємне, тобто:

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a \leq 0 \end{cases}$$

З означення 1 випливають такі відомі співвідношення:

$|\boldsymbol{a}| \leq \boldsymbol{b} \Rightarrow -\boldsymbol{b} \leq \boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{b}$;

$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| \leq |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$.

Означення 2

Величини A та B називають **прямо пропорційними,** якщо існує **коефіцієнт пропорційності** $\boldsymbol{k}$ такий, що виконується рівність: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{k} * \boldsymbol{B}$**.**

Для поділу числа $\boldsymbol{A}$ на частини, пропорційні числам $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ треба ввести коефіцієнт пропорційності $\boldsymbol{k}$. Тоді

$A = k \times B + k \times C + k \times D$; $A = k \times (B + C + D) \Rightarrow$

$$k = \frac{A}{B+C+D},$$

і відповідні частини будуть мати значення:

$$B \times \frac{A}{B+C+D};\ C \times \frac{A}{B+C+D} \text{ та } D \times \frac{A}{B+C+D}$$

Приклад 1

До нового року дідусь подарував онукам, яким 14, 6 та 3 роки, 759 грн за умови, що вони будуть поділені пропорційно до їх віку. Яку суму отримає кожен з онуків?

Розв'язання

Треба поділити 759 грн. на частини, пропорційні 14, 6 та 3. Нехай $\boldsymbol{k}$ – коефіцієнт пропорційності, тоді

$759 = 14 \times \boldsymbol{k} + 6 \times \boldsymbol{k} + 3 \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k} \times (14 + 6 + 3) = 23 \times \boldsymbol{k}$;

Отже, $\boldsymbol{k} = 759/23 = 33$.

Звідси розв'язок;

Старший одержить $14 \times 33 = 462$ грн.

Середній одержить $6 \times 33 = 198$ грн.

Молодший одержить $3 \times 33 = 99$ грн.

Означення 3

Величини A та B називають **обернено пропорційними,** якщо існує **коефіцієнт пропорційності** $\boldsymbol{k}$ такий, що виконується рівність: $\boldsymbol{B = k / A}$.

Для поділу числа $\boldsymbol{A}$ на частини, пропорційні числам $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ треба шукані частини вважати рівними $\boldsymbol{k / B, k / C, k / D}$. Тоді

$$A = k / B + k / C + k / D; \; A = k / \left(1 / B + 1 / C + 1 / D\right) \Rightarrow$$

$$k = \frac{A}{\frac{1}{B} + \frac{1}{C} + \frac{1}{D}} = \frac{A \cdot B \cdot C \cdot D}{C \cdot D + B \cdot D + B \cdot C},$$

знайдений $\boldsymbol{k}$ дозволяє знайти шукані частини.

Приклад 2

Власник підприємства виділив 880 грн на заохочення 3-х працівників і вирішив розподілити ці кошти обернено пропорційно кількості втрачених робочих годин. Скільки коштів одержить кожен працівник, якщо один з них втратив 3 години, другий – 25/16, третій – 5 годин?

Розв'язання

Треба поділити 880 грн на частини, обернено пропорційні 3, 25/16 та 5. Нехай $\boldsymbol{k}$ – коефіцієнт пропорційності, тоді шуканими частинами будуть:

$k / 3$; $k / 25 / 26 = 16 \times k / 25$; $k5$;

Складемо рівняння:

$$880 = k / 3 + 16 \times k / 25 + k / 5 = k \times \left(1 / 3 + 16 / 25 + 1 / 5\right) =$$

$$= k \times \left(25 + 48 + 15\right) / 75 = k \times 88 / 75 \Rightarrow k = 880 \times 75 / 88 = 750,$$

а шукані частини:

$750 / 3 = 250$ грн; $16 \times 750 / 25 = 480$ грн; $750 / 5 = 150$ грн.

§ 2 АЛГЕБРАЇЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ НА R

У ході перетворень використовують формули скороченого множення:

1) $\boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{b}^2 = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$;

2) $(\boldsymbol{a}^3 - \boldsymbol{b}^3) = (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{ab} + \boldsymbol{b}^2)$;

3) $(\boldsymbol{a}^3 + \boldsymbol{b}^3) = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{ab} + \boldsymbol{b}^2)$;

4) $(\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 \pm 2\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{b}^2$;

5) $(\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b})^3 = \boldsymbol{a}^3 \pm 3\boldsymbol{ab}^2 + 3\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b} \pm \boldsymbol{b}^3$,

та властивості дій над степенями:

1. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$; $\quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$; $\quad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}}$;

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}$$

2. $a^{-k} = \dfrac{1}{a^k}$; $\quad a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$; $\quad a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

3. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

§ 3 ЛОГАРИФМ ЧИСЛА ТА ДЕЯКІ ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

$\boldsymbol{c} = \log_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{b}$ – показник степені, до якої треба піднести основу $\boldsymbol{a}$, щоб отримати число $\boldsymbol{b}$. Або $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{c}}$.

У логарифмічному рівнянні $\log_a x = b$ розглядаються $a > 0$, $x > 0$, $a \neq 1$.

Для логарифма вірно:

$$\log_a b = \begin{cases} > 0, \quad якщо \quad a > 1 \quad і \quad b > 1 \\ = 0, \quad якщо \quad b = 1 \\ < 0 \quad якщо \quad a > 1 \quad і \quad 0 < b < 1 \end{cases}$$

6. $\forall a, b \in R \quad a^{\log_a b} = b$,

7. $\forall a, b \in R \quad \log_a b = 1 \quad \Leftrightarrow \quad b = a$,

8. $\forall a, b \in R \quad \log_a b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = 1$,

9. $\log_a b = \log_a c \quad \Leftrightarrow \quad b = c$,

10. $\log_a b + \log_a c = \log_a (b \cdot c)$,

11. $\log_a b - \log_a c = \log_a \left(\frac{b}{c}\right)$,

12. $\log_a b^k = k \cdot \log_a b$,

13. $\log_{a^m} b = \log_a b^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m} \cdot \log_a b$,

14. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ - перехід до нової основи логарифма

15. $\log_e a = \ln a$ - натуральний логарифм, який має за основу ірраціональне число $\boldsymbol{e} = \mathbf{2{,}718281828}$...

16. $\log_{10} a = \lg a$ - десятковий логарифм, в його основі – число 10.

§ 4 ОСНОВНІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФОРМУЛИ

1) $tgx = \frac{\sin x}{\cos x}$, $ctgx = \frac{\cos x}{\sin x}$, $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, $\cos ecx = \frac{1}{\sin x}$

2) Формули додавання

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y),$$

$$\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y),$$

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y),$$

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y),$$

$$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y).$$

3) Формули подвійних та потрійних кутів

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x,$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x,$$

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x,$$

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x.$$

4) Формули перетворення алгебраїчних сум у добуток

$$\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right),$$

$$\sin x - \sin y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right),$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right),$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

§ 5 ПРОГРЕСІЇ

5.1 Загальні поняття числової послідовності

Означення

Числовою послідовністю називають деякій набір чисел, кожне з яких має певне місце (номер) у цьому наборі. Тобто кожному номеру ставиться у відповідність **одне і тільки одне** число. Позначається числова послідовність так:

$$a_1, a_2, ..., a_n\text{, або } \{a_k\}_{k=1}^{n},$$

де a_k називають членом числової послідовності; k – номером члена послідовності; n – кількістю членів послідовності.

Для визначення чергового члена числової послідовності необхідно задати закон, за яким він обчислюється. Частіше за все таким законом є аналітична формула **загального члена послідовності.** Наприклад,

$$a_k = \frac{2k}{k+1}, \qquad k \in N .$$

Наведена формула задає послідовність 1, $\frac{4}{3}, \frac{6}{4}, \frac{8}{5}...$

Числову послідовність називають **скінченою**, якщо вона має скінчене число елементів і **нескінченою**, коли кількість елементів безкінечна.

Числову послідовність називають:

1. Монотонно зростаючою (спадною), коли кожний наступний елемент послідовності більший (менший) за попередній, або для будь - якого члена числової послідовності a_k виконується нерівність: $a_k < a_{k+1} \quad (a_k > a_{k+1}), \quad k \in N$.

2. Обмеженою зверху, якщо всі її члени менше за деяке скінчене число M , або

$$\forall a_k \ \exists M : a_k < M, \quad k \in N .$$

3. Обмеженою знизу, якщо всі її члени більші за деяке скінчене число m , або

$$\forall a_k \ \exists m : a_k > m, \quad k \in N .$$

4. Обмеженою, якщо вона обмежена зверху та знизу, або

$$\forall a_k \ \exists M, m : m < a_k < M, \quad k \in N .$$

5.2 Арифметична прогресія та прості відсотки

Означення 1

Арифметичною прогресією називається числова послідовність, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює сумі попереднього члена та певного сталого для даної послідовності числа d . Число d носить назву **різниці арифметичної прогресії.**

Якщо через a_n позначити n-й член арифметичної прогресії, то можна записати:

$$a_{n+1} = a_n + d, \quad n \in N. \tag{1}$$

Методом математичної індукції можна довести формулу зв'язку першого та n-го членів арифметичної прогресії через її знаменник:

$$a_n = a_1 + (n-1)d, \quad n \in N. \tag{2}$$

Якщо $d > 0$, то арифметична прогресія є **монотонно зростаючою**, якщо $d < 0$, то прогресія **монотонно спадна**.

Властивості арифметичної прогресії

1) Кожен член арифметичної прогресії, починаючи з другого, дорівнює півсумі двох сусідніх з ним членів:

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}, \quad k \geq 2, k \in N;$$

2) Сума двох членів арифметичної прогресії, рівновіддалених від її кінців, дорівнює сумі першого та останнього її членів: $a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n$. Наприклад, якщо розглянути 10 членів арифметичної прогресії, то

$$a_2 + a_9 = a_3 + a_8 = a_4 + a_7 = a_5 + a_6 = a_1 + a_{10}.$$

3) Сума членів скінченої арифметичної прогресії дорівнює добутку півсуми її крайніх членів на кількість всіх членів:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n, \tag{3}$$

або, враховуючи (2),

$$S_n = \frac{a_1 + a_1 + (n-1)d}{2} n = a_1 + \frac{d(n-1)n}{2}. \tag{4}$$

Приклад

Фірма почала використовувати нову технологічну лінію, вартістю 1 млн 700 тис. гривень, вартість якої буде зменшуватися на 150 тис. гривень щорічно. Відомо, що в разі, коли вартість лінії зменшиться до 200 тис. гривень, лінію не можна експлуатувати у виробництві.

Знайти вартість цієї технологічної лінії через n років. Визначити, скільки років цю лінію можна експлуатувати.

Розв'язання

1. Оскільки вартість технологічної лінії зменшується з кожним роком на певну сталу величину 150 тис. грн, то можна зробити висновок, що послідовність вартостей рік за роком складають арифметичну прогресію. При цьому у кінці першого року вартість буде становити

$a_1 = 1700\,тис.грн - 150\,тис.грн = 1550\ тис.грн$, у кінці другого - $a_2 = 1550\,тис.грн - 150\,тис.грн = 1400\ тис.грн$ і т. д., тобто арифметична прогресія задана

$a_1 = 1550\,тис.грн,\ \ d = -150\,тис.грн.$

Згідно (2) $a_n = a_1 + (n-1)d = 1550 + (n-1)\cdot(-150) = 1550 + 150 - -150n = 1700 - 150n$.

Отже, через n років вартість лінії становитиме $a_n = 1700 - 150n$ тис. грн.

2. Відомо, що лінію треба вилучати з експлуатації, коли її вартість буде становити 200 тис. грн. Визначимо, коли це станеться. Очевидно через кілька років у послідовності вартостей лінії з'явиться член $a_n = 200$ тис. грн. Визначимо, коли це станеться:

$$200 = 1700 - 150n;\ \ 150n = 1700 - 200;\ \ n = \frac{1500}{150} = 10 .$$

Отже, нову технологічну лінію можна експлуатувати 10 років.

Прості відсотки на капітал

За допомогою арифметичної прогресії розв'язується задача нарахування простих відсотків на капітал. Нехай у деяку банківську установу внесено кошти у розмірі P грош. од. За умови щорічного нарахування на цю суму $R\%$ від внесених коштів.

Означення 2

Простими відсотками називається сталий відсоток від **внесеної суми коштів**, який наприкінці кожного року додається до поточного капіталу.

Наприклад, якщо було внесено P=1000 гривень під R=15% річних за умови нарахування простих відсотків, то наприкінці першого року внесений капітал збільшиться на суму $d = \frac{R}{100\%} \cdot P = \frac{15\%}{100\%} \cdot 1000\, грн = 150\, грн$ і становитиме $P_1 = P + d = 1000 + 150 = 1150\, грн.$

Наприкінці другого року до поточної суми знов додається величина $d = 150\, грн$ і капітал становитиме суму $P_2 = P_1 + d = P + 2d = 1000 + 2 \cdot 150 = 1000 + 300 = 1300\, грн$ і т.д.

Отже, капітал P у разі накопичення капіталу за схемою простих відсотків зростає за правилом арифметичної прогресії із різницею $d = \frac{R}{100\%} P$ грош.од. і початковим членом $P_1 = P + d = P + \frac{R}{100\%} P$ грош. од.

Через n років величина капіталу буде становити

$$P_n = P_1 + (n-1) \cdot d = P + d + (n-1) \cdot d =$$

$$= P + n \cdot d = P + \frac{R}{100\%} \cdot P \cdot n = P\left(1 + \frac{R}{100\%} \cdot n\right) \text{ грош. од.}$$

Для наведеного вище прикладу капітал $\boldsymbol{P}$ через 10 років становитиме $P = 1000 + 10 \cdot 150 = 2500\, грн.$

Звертаємо увагу на те, що різниця арифметичної прогресії є вимірною величиною, як і всі члени прогресії.

5.3 Геометрична прогресія та складні відсотки

Означення 1

Геометричною прогресією називається числова послідовність, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює добутку попереднього члена та певного сталого для даної послідовності числа q. Число q носить назву **знаменника геометричної прогресії.**

Якщо через b_n позначити n-й член геометричної прогресії, то можна записати:

$$b_{n+1} = b_n \cdot q, \quad n \in N . \tag{1}$$

Методом математичної індукції можна довести формулу зв'язку першого та n-го членів геометричної прогресії через її знаменник:

$$b_n = b_1 q^{n-1} \quad n \in N . \tag{2}$$

Якщо $|q| > 1$, то геометрична прогресія є **зростаючою**, Якщо ж $|q| < 1$, то прогресія **спадна**.

Властивості геометричної прогресії

1. Кожен член геометричної прогресії, починаючи з другого дорівнює середньому геометричному двох сусідніх з ним членів: $b_k = \sqrt{b_{k-1} \cdot b_{k+1}}, \quad k \geq 2, k \in N$.

Добутки двох членів геометричної прогресії, рівновіддалених від її кінців рівні між собою: $b_k \cdot b_{n-k+1} = b_1 \cdot b_n$. Дійсно, використовуючи (2), можна вивести:

$$b_k \cdot b_{n-k+1} = b_1 q^{k-1} \cdot b_1 \cdot q^{n-k+1-1} =$$
$$= b_1 \cdot b_1 \cdot q^{k-1+n-k} = b_1 \cdot b_1 \cdot q^{n-1} = b_1 \cdot b_n .$$

2. Сума членів скінченої геометричної прогресії знаходиться за формулою

$$S_n = \frac{b_1\left(1 - q^n\right)}{1 - q} . \tag{3}$$

3. Сума всіх членів нескінченої спадної геометричної прогресії знаходиться за формулою

$$S_n = \frac{b_1}{1-q}. \tag{4}$$

Складні відсотки на капітал

За допомогою геометричної прогресії розв'язується задача нарахування складних відсотків на капітал. Нехай у деяку банківську установу внесено кошти у розмірі P грош. од. за умови їх щорічного зростання на R **складних відсотків.** Це означає щорічний зріст коштів на $R\%$ від **поточного значення капіталу**.

Означення 2

Складними відсотками називається сталий відсоток від **поточної суми коштів**, який наприкінці кожного обумовленого періоду додається до поточного капіталу. Причому періодом нарощування відсотків не обов'язково є рік.

Якщо нарахування складних відсотків іде щорічно, то наприкінці першого року внесені кошти зростуть до суми $P_1 = P + \frac{R}{100\%}P = P\left(1+\frac{R}{100\%}\right)$. Наприкінці другого -

$$P_2 = P_1 + \frac{R}{100\%}P_1 = P\left(1+\frac{R}{100\%}\right) + P\left(1+\frac{R}{100\%}\right)\cdot\frac{R}{100\%} =$$

$$= P\left(1+\frac{R}{100\%}\right)\cdot\left(1+\frac{R}{100\%}\right) = P\cdot\left(1+\frac{R}{100\%}\right)^2,$$

наприкінці третього –

$$P_3 = P_2 + \frac{R}{100\%}P_2 = P\left(1+\frac{R}{100\%}\right)^2\cdot\left(1+\frac{R}{100\%}\right) = P\cdot\left(1+\frac{R}{100\%}\right)^3.$$

Отже, послідовність нарощування капіталу є **геометричною прогресією** із знаменником $q = 1+\frac{R}{100}$ і першим членом

$P_1 = P\left(1+\dfrac{R}{100\%}\right)$. Тому через $\boldsymbol{n}$ років сума капіталу буде становити, згідно (2),

$$P_n = b_1 \cdot q^{n-1} = P\left(1+\frac{R}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{R}{100}\right)^{n-1} = P\cdot\left(1+\frac{R}{100}\right)^{n}. \qquad (5)$$

Приклад

Клієнт поклав у банк P=5000 гривень на умовах росту капіталу за складними процентами на 10 років. Нарахування відбувається наприкінці кожного року у розмірі R=8% від **поточної** суми.

Обчислити яку суму отримає клієнт після закінчення терміну договору.

Розв'язання

Стартовий капітал, покладений у банк становить P=5000 грн. Нарахування відбувається за складними процентами.

Наприкінці першого року внесена сума грошей виросте на 8 відсотків і становитиме

$$P_1 = P + P\cdot\frac{R}{100} = 5000\cdot(1+0{,}08) \text{ грн.}$$

На кінець другого року проценти будуть нараховуватися вже на поточний, тобто збільшений капітал P_1 – $P_2 = P_1 + P_1\cdot\dfrac{R}{100} = P\left(1+\dfrac{R}{100}\right)^2 =$

$= 5000\cdot(1+0.08)^2$ грн.

Отже, нарощування капіталу відбувається за правилом геометричної прогресії з першим членом $b_1 = P\left(1+\dfrac{R}{100}\right) =$

$= 5000(1+0.08) = 5400$ грн та знаменником $q = \left(1+\dfrac{R}{100}\right) = 1.08$.

Зверніть увагу: знаменник геометричної прогресії є **невимірною величиною.**

Оскільки $q > 1$, то така геометрична прогресія монотонно зростаюча.

Вкладник має отримати свої збільшені кошти наприкінці 10-го року, отже необхідно знайти десятий член отриманої геометричної прогресії. Використаємо (2):

$$P_{10} = b_{10} = b_1 q^{n-1} = P \cdot \left(1 + \frac{R}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{R}{100}\right)^{10-1} =$$

$$= P \cdot \left(1 + \frac{R}{100}\right)^{10} = 5000 \cdot 1{,}08^{10} = 5000 \cdot 2{,}1589 = 10794{,}62 .$$

Отже, після 10 років вкладник отримає капітал у розмірі 10794 грн 62 коп.

§ 6 ФІНАНСОВА АРИФМЕТИКА

Велика множина задач у сфері фінансових розрахунків мають у своїй основі прості та складні проценти, а отже і властивості арифметичної і геометричної прогресій. Розглянемо низку прикладів фінансових задач, які базуються на вищевикладеному матеріалі.

6.1 РОЗРАХУНКИ НАКОПИЧЕННЯ

Однією з найпоширеніших задач щодо розрахунку накопичення є задача розрахунку росту внеску юридичного чи фізичного лиця за умови, що на рахунок періодично із сталим періодом (рік, місяць, квартал) надходять кошти під складні відсотки, які регулярно, наприклад у кінці кожного періоду нараховуються на поточну суму внеску. Розглянемо задачу:

Задача

З метою накопичення коштів клієнт поклав у банк капітал у P=1000 грн під складні проценти – R=8% річних. Кожного року він докладає до поточної суми ще P=1000 грн.

Необхідно:

1. Побудувати формулу, за якою можна обчислити накопичені кошти на кінець будь - якого року n.
2. Обчислити накопичений капітал через 10 років.

Розв'язання

Зробимо важливе зауваження: у фінансових розрахунках не обов'язково вклади і нарощування відсотків відбуваються раз на рік. Можуть бути як менші за часом періоди (місяць, квартал) так і більші. Тому термін, за який нараховуються відсотки називають **періодом.** У нашій задачі період дорівнює одному року.

1. Побудуємо формулу для довільної кількості періодів зберігання коштів. Як уже визначалося раніше складні проценти задають геометричну прогресію із першим членом $P_1 = P\left(1+\frac{R}{100}\right)$ і знаменником $q = \left(1+\frac{R}{100}\right)$.

Початковий капітал – 1000 грн.

На кінець **першого** періоду (року) цей капітал збільшиться за формулою

$$P_1 = P\left(1+\frac{R}{100}\right) = 1000 \cdot 1.08 = 1080 \text{ грн.}$$

На початку **другого** року вкладник додає ще 1000 грн, отже, капітал, який наприкінці другого року буде зростати становить

$$P_1' = P_1 + P = P \cdot \left(1+\frac{R}{100}\right) + P = 1080 + 1000 = 2080 \text{ грн.}$$

На кінець **другого** періоду капітал виросте за формулою:

$$P_2 = P_1'\left(1+\frac{R}{100}\right) = \left(P \cdot \left(1+\frac{R}{100}\right) + P\right) \cdot \left(1+\frac{R}{100}\right) =$$

$$= P \cdot \left(1+\frac{R}{100}\right)^2 + P \cdot \left(1+\frac{R}{100}\right) = 1000\left(1.08^2 + 1.08\right) =$$

$$= 1000 \cdot 3.238925 = 3238.925.$$

На початку **третього** періоду вкладник додає ще 1000 грн., отже, капітал, який наприкінці третього року буде зростати становить

$$P_2' = P_2 + P = P \cdot \left(1 + \frac{R}{100}\right)^2 + P \cdot \left(1 + \frac{R}{100}\right) + P =$$

$= 3238.925 + 1000 = 4238.925$ грн.

На кінець **третього** періоду капітал виросте за формулою:

$$P_3 = P_2'\left(1 + \frac{R}{100}\right) = \left(P \cdot \left(1 + \frac{R}{100}\right)^2 + P \cdot \left(1 + \frac{R}{100}\right) + P\right) \times$$

$$\times \left(1 + \frac{R}{100}\right) = P \cdot \left(1 + \frac{R}{100}\right)^3 + P \cdot \left(1 + \frac{R}{100}\right)^2 + P \cdot \left(1 + \frac{R}{100}\right).$$

Щоб проаналізувати останню формулу згадаємо формулу (5) розрахунків внесків P за складними процентами з заданою фіксованою процентною ставкою R: за n періодів капітал буде нарощений до величини $P_n = P \cdot \left(1 + \frac{R}{100}\right)^n$.

У нашій задачі капітал, внесений на початку першого періоду (позначили P), до кінця третього року пролежав на вкладі 3 періоди, отже має приріст $P_3 = P \cdot \left(1 + \frac{R}{100}\right)^3$ – перший доданок у сумі. Внесок, зроблений на початку 2-го року до кінця третього року пролежав на вкладі 2 періоди, отже, має приріст $P_2 = P \cdot \left(1 + \frac{R}{100}\right)^2$ – другий доданок. Внесок, зроблений на початку 3-го року до кінця цього ж року пролежав на вкладі тільки один період, отже, його приріст $P_1 = P \cdot \left(1 + \frac{R}{100}\right)$ – третій доданок.

Можна зробити висновок про структуру формули для обчислення довільного члена прогресії: **якщо розглядається *n* пе-**

ріодів вкладу, то загальний капітал наприкінці n-го періоду буде сумою доданків, кожен з яких є нарощенням капіталу на кожний з внесків, проведених за n періодів, тобто

$$P_n = P\left(\left(1+\frac{R}{100}\right)^n + \left(1+\frac{R}{100}\right)^{n-1} + \ldots + \left(1+\frac{R}{100}\right)\right).$$

Тобто n-й член побудованої геометричної прогресії є добутком початкового капіталу P на суму n членів іншої геометричної прогресії:

$$b_1 = 1+\frac{R}{100};$$
$$b_2 = \left(1+\frac{R}{100}\right)^2;$$
$$b_3 = \left(1+\frac{R}{100}\right)^3;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$
$$b_n = \left(1+\frac{R}{100}\right)^n$$

із знаменником $q = 1+\dfrac{R}{100}$.

За формулою (3) розділу 5.3 така сума n перших членів геометричної прогресії складе

$$S_n = \frac{b_1\left(q^n-1\right)}{q-1} = \frac{\left(1+\frac{R}{100}\right)\cdot\left(\left(1+\frac{R}{100}\right)^n-1\right)}{\left(1+\frac{R}{100}\right)-1} =$$

$$= \frac{\left(1+\frac{R}{100}\right)\cdot\left(\left(1+\frac{R}{100}\right)^n-1\right)}{\frac{R}{100}} = \left(1+\frac{R}{100}\right)\cdot\frac{\left(\left(1+\frac{R}{100}\right)^n-1\right)}{\frac{R}{100}} =$$

$$= (1+0.08)\cdot\frac{\left((1+0.08)^n-1\right)}{0.08} = 1.08\cdot\frac{\left((1+0.08)^n-1\right)}{0.08}.$$

Отже, формула для знаходження довільного члена геометричної прогресії, яка є по суті послідовністю накопичування капіталу побудована для вихідної задачі:

$$P_n = P\cdot S_n = 1000\cdot 1.08\cdot\frac{\left((1+0.08)^m-1\right)}{0.08} = 1080\cdot\frac{\left((1+0.08)^n-1\right)}{0,08}.$$

2. Обчислимо, який капітал буде мати вкладник наприкінці 10-го року внеску:

$$P_{10} = 1080\cdot\frac{\left((1+0.08)^{10}-1\right)}{0,08} = 1080\cdot 14,486562 = 15645.44 \text{ грн.}$$

Отже, через 10 років вкладник отримає капітал 15645 гривень і 44 копійки.

Узагальнимо все викладене вище

Визначимо процентну величину R згідно з теорією фінансів, як **процентну ставку**. Позначимо величину $\frac{R}{100} = i$. Така величина у фінансах називається **коефіцієнтом дисконтування** і є без вимірною величиною.

З використанням введеного позначення сума капіталу, яка була нарощена в кінці n-го періоду становить

$$P_n = P\left((1+i)^n + (1+i)^{n-1} + \ldots + (1+i)\right),$$

де в дужках стоїть сума n членів геометричної прогресії з першим членом $b_1 = 1+i$ і знаменником $q = 1+i > 1$.

У цьому разі за формулою (3) розділу 5.3

$$P_n = P\cdot\frac{(1+i)\cdot\left((1+i)^n-1\right)}{(1+i-1)} =$$

$$= P\cdot\frac{(1+i)\cdot\left((1+i)^n-1\right)}{i} = P\cdot(1+i)\cdot\frac{\left((1+i)^n-1\right)}{i}.$$

У фінансових розрахунках величина $\frac{(i+1)^n-1}{i}$ позначається через $s_{n/i}$, тобто $s_{n/i}=\frac{(i+1)^n-1}{i}$, що означає складно відсоткову величину за n періодів з коефіцієнтом дисконтування i. Наприклад, у попередній задачі була обчислена величина $s_{10/0.08}=14.486562$. Для визначення такої величини в практиці фінансових розрахунків існують спеціальні таблиці.

6.2 Розрахунки ренти

Ще одним класом задач фінансової арифметики є задачі розрахунку різних видів ренти.

Означення

Рентою називається заздалегідь обумовлена величина коштів, яка виплачується регулярно протягом певного обумовленого часу банком чи страховою компанією клієнту з його відповідного рахунку.

Можуть виникнути дві задачі:

1. Скільки треба покласти коштів на рахунок ренти в банк або страхову компанію, щоб протягом певного часу регулярно отримувати задану суму коштів.
2. Якщо на рахунок ренти внесена певна сума коштів, яку щорічну ренту буде регулярно отримувати клієнт протягом певного часу.

Розглянемо спочатку першу задачу

Нехай страхова компанія заключила з клієнтом договір, згідно якого клієнт, починаючи з кінця першого року вкладу протягом n років, буде отримувати ренту в K грошових одиниць. Яку кількість грошей треба покласти клієнту для виконання договору, якщо відомо, що процентна ставка згідно договору становить R процентів річних.

Розглянемо послідовно як формується рента для одного, двох і т.д. років.

Позначимо суму коштів, яку клієнту необхідно внести, щоб отримати заплановану ренту через рік, P_1. Згадаємо, що відношення $\frac{R}{100} = i$ називається коефіцієнтом дисконтування.

Наприкінці першого року вкладу сума P_1 зросте згідно з коефіцієнтом дисконтування до величини $K = P_1(1+i)$. Отже, саме цю суму може отримати клієнт за ренту. Якщо клієнт визначився з сумою ренти, тобто K – відома величина, то суму першого внеску можна розрахувати за формулою

$$P_1 = \frac{K}{(1+i)} = K \cdot (1+i)^{-1}.$$

Частина коштів P_2, що складає ренту, яку отримає клієнт через 2 роки, пролежить у страховій компанії відповідно 2 роки, отже, за правилом розрахунку складних процентів на неї наросли проценти $K = P_2(1+i)^2$. Отже, для отримання ренти в K грошових одиниць через 2 роки на рахунок ренти треба внести $P_2 = K(1+i)^{-2}$ грошових одиниць. За аналогією для отримання ренти в K грошових одиниць через 3 роки на рахунок ренти треба покласти $P_3 = K(1+i)^{-3}$ грошових одиниць, через n років - $P_n = K(1+i)^{-n}$ грошових одиниць.

Отримали послідовність

$$P_1 = K(1+i)^{-1};\ P_2 = K(1+i)^{-2};\ \ldots, P_n = K(1+i)^{-n}.$$

Це геометрична прогресія з першим членом $b_1 = K(1+i)^{-1}$ і знаменником $q = (1+i)^{-1} < 1$. Прогресія спадна. У цьому випадку сума n перших членів згідно з формулою (3) розділу 6.3 дорівнює $S_n = \dfrac{b_1\left(1-q^n\right)}{1-q} = \dfrac{K(1+i)^{-1}\left(1-(1+i)^{-n}\right)}{\left(1-(1+i)^{-1}\right)}$. Спростимо результат, помноживши чисельник і знаменник на $(1+i)$, отримаємо:

$$S_n = \frac{K\left(1-(1+i)^{-n}\right)}{((1+i)-1)} = \frac{K\left(1-(1+i)^{-n}\right)}{i}.$$

Саме цю суму коштів необхідно внести на рахунок ренти, щоб починаючи з кінця поточного року, кожен рік протягом n років отримувати ренту в K грошових одиниць.

Величина $\dfrac{\left(1-(1+i)^{-n}\right)}{i}$ у фінансових розрахунках позначається через $a_{n/i}$ і як і величина $s_{n/i}$, зведена у таблицю (дивись таблицю1 наприкінці розділу 6).

Отже, якщо величину ренти позначити через P, то можна записати остаточну формулу розрахунку вкладеного капіталу P для ренти в K грошових одиниць, яку клієнт буде отримувати щорічно, починаючи з кінця першого року протягом n років:

$$P = K \cdot a_{n/i}, \qquad (1)$$

$a_{n/i} = \dfrac{\left(1-(1+i)^{-n}\right)}{i}$ - таблична величина.

Приклад

У день свого 65-ти річчя клієнт заключив із страховою компанією договір, що на протязі 20 років, починаючи з 66-го року, на день свого народження він буде отримувати ренту у 5000 грн. Компанія відкрила клієнту рахунок ренти з щорічним зростанням внесених коштів на 8%. Яку суму необхідно внести клієнту для виконання умов договору?

Розв'язання

Згідно договору клієнт щорічно, починаючи з 66-го дня народження повинен отримувати ренту $K = 5000$ гривень. Коефіцієнт дисконтування, виходячи з процентної ставки у 8%, становить $i = 0{,}08$. З наведеною в цьому розділі формулою (1)

$P = K \cdot a_{n/i} = 5000 \cdot a_{20/0.08}$. Величину $a_{20/0.08}$ візьмемо з таблиці: $a_{20/0.08} = 9.818147$.

Отже для виконання договору клієнт повинен внести на рахунок ренти $P = 5000 \cdot 9{,}818147 = 49090{,}74 \approx 49091$ гривень.

Розглянемо іншу задачу

Звернемося до прикладу.

Деякий передбачливий громадянин у день свого 50-ти річчя, маючи капітал у $P = 10000$ грн, вирішив відкрити у страховій компанії рахунок ренти з тим, щоб через 15 років отримувати ренту щорічно на початку року протягом 15 років. Компанія заключила договір з цим громадянином з умовою нарахування на капітал 8% річних.

Клієнта цікавить, яку суму грошей буде становити його рента?

Розв'язання

Переформуємо так, щоб вона звелася до двох відомих задач. Якщо клієнт вклав гроші на рахунок ренти і хоче отримати першу ренту на **початку** 16-го року вкладу, то спочатку задачу слід розглянути, як задачу накопичення коштів за складними процентами протягом **14 років**. Після цього можна вважати , що на початку **15-го року** отриманий капітал починає працювати по **угоді про ренту** з першою виплатою через рік. Таку задачу ми розглядали вище. Отже, розділяємо задачу на 2 етапи:

перший етап – знайти капітал, що накопичиться з вкладеної суми на кінець 14-го (початок 15-го) року з урахуванням накопичення за процентною ставкою R=8% річних;

другий етап – розрахувати значення щорічної ренти на 15 років, виходячи з накопиченого капіталу. Рента повинна бути виплаченою вперше на початку 16-го року вкладу. Отже, з початку 15-го по початок 16-го років теж іде накопичення.

Перед розв'язанням задачі визначимо, що коефіцієнт дисконтування в нашому прикладі дорівнює $i = \dfrac{R}{100} = 0.08$.

Для розв'язання першої частини задачі використаємо формулу (5) з розділу 5.3. Для цієї формули маємо величини

$P = 10000,\ n = 14,\ i = 0{,}08:\ \ P_{14} = P(1 + 0.08)^{14}$. Величину $(1 + i)^n$ для фінансових розрахунків теж беруть із таблиць: $(1 + 0.08)^{14} = 2.937194$. Отже, накопичена сума на кінець 14-го року буде становити

$$P_{14} = 10000 \cdot 2.937194 = 29371.94 \text{ грн.}$$

Перейдемо до другого етапу розрахунків. Отже, стартова сума для виконання рентових умов на початок 15-го року є $P = 29371.94$ грн. Використаємо формулу розрахунку ренти (1) з даного розділу

$$P = K \cdot a_{n/i},$$

де $a_{n/i} = \dfrac{\left(1 - (1 + i)^{-n}\right)}{i}$ – таблична величина. Нагадуємо, що

P – вкладений капітал;

K – щорічна рента з першою виплатою через рік після вкладу;

n – кількість років, протягом яких планується отримувати ренту;

i – коефіцієнт дисконтування.

Але тепер ми повинні розв’язати обернену задачу – маємо капітал P, а шукаємо значення ренти K. Отже,

$$K = \frac{P}{a_{n/i}}. \qquad (2)$$

У нашій задачі $P = 29371.94$ грн, $a_{n/i} = a_{15/0.08} = 8.559479$.

Розрахуємо ренту: $K = \dfrac{29371.94}{8.559479} = 3431.51$ грн.

Отже, вклавши на рахунок ренти суму у 10000 грн у день свого 50-ти річчя під 8% річних, передбачливий громадянин буде отримувати, починаючи зі свого 66-го року народження щорічно протягом 15-ти років по 3431,51 грн.

Висновок

Використовуючи формулу $P = K \cdot a_{n/i}$, , де $a_{n/i} = \dfrac{\left(1-(1+i)^{-n}\right)}{i}$ – таблична величина, ми можемо розв'язувати як пряму, так і обернену задачу розрахунків по ренті. Тобто можемо на визначений термін і суму ренти розрахувати **потрібний внесок** і можемо, знаючи суму першого внеску і термін отримання ренти, розрахувати **значення щорічної ренти**.

6.3 Погашення боргу

Означення

Процес повернення боргу регулярно, певними частинами, в певний термін і протягом обумовленого часу із виплатою певного відсотка від залишкової суми боргу називають **погашенням боргу** або його **амортизацією**.

Задача погашення боргу виникає, наприклад, у тому разі, коли банківська установа видає юридичному або фізичному лицю кредит на певний термін під певні проценти. Сума кредитування називається для такої операції **тілом кредиту**.

Наприклад, особа оформила у банку кредит на 5 тис. грн на 1 рік з умовою виплати щомісячно частини тіла кредиту і 3% від залишкової суми кредиту.

Виникає питання, якою повинна бути щомісячна сума погашення боргу?

Дана задача математично аналогічна задачі виплати ренти. Дійсно, можна вважати, що банківська установа внесла на рахунок клієнта початкову суму коштів і розраховує за 12 місяців щомісячно, починаючи з кінця першого місяця, отримувати від клієнта ренту за умови росту капіталу на 3% щомісячно.

Через таку аналогію для розрахунку суми щомісячної виплати боргу можна застосувати формулу (1) розділу 6.3: $P = K \cdot a_{n/i}$, , де $a_{n/i} = \dfrac{\left(1-(1+i)^{-n}\right)}{i}$. Позначимо суму щомісячної виплати боргу, яка співпадає за математичним змістом із сумою ренти через B, а тіло кредиту, яке за математичним змістом співпадає з початковим вкладом, через Kr. Отримаємо $Kr = B \cdot a_{n/i}$,. Звідси формула для розрахунку суми щомісячного погашення кредиту буде така:

$$B = \frac{Kr}{a_{n/i}},$$

де $a_{n/i} = \frac{\left(1-(1+i)^{-n}\right)}{i}$ має той же зміст, що і для задачі про ренту.

Для наведеного прикладу $Kr = 5000\,грн$, $a_{n/i} = a_{12/0.03} = 9.954004$ (оскільки рік має 12 місяців, відсотки нараховуються за умовою задачі щомісячно, процентна ставка R=3%, тобто $i = 0{,}03$). Щомісячна виплата боргу становитиме

$$B = \frac{Kr}{a_{n/i}} = \frac{5000}{9.954004} = 502.31 \text{ грн.}$$

§ 7 КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА

Комплексні числа є подальшим розширенням множини дійсних чисел. Необхідність у них виникла у зв'язку з задачею розв'язання квадратних рівнянь. У множині дійсних чисел неможливо розв'язати квадратне рівняння з від'ємним дискримінантом. Комплексні числа – необхідний інструментарій у різних розділах математики. У нашому курсі вони будуть необхідні в аналітичній геометрії під час вивчення власних чисел і векторів квадратичних форм та в елементах теорії розв'язання диференціальних рівнянь (2-й семестр). Множина комплексних чисел позначається $\boldsymbol{C}$.

7.1 Визначення комплексного числа. Операції над комплексними числами

Уявна одиниця $\boldsymbol{i}$ була введена, як результат добування квадратного кореня з –1,
тобто

$$i=\sqrt{-1}, \quad i^2=-1.$$

Означення 1

Комплексним числом називається вираз виду $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\boldsymbol{i}$, де $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in \boldsymbol{R},\boldsymbol{i}$ – уявна одиниця. Число $\boldsymbol{x}$ називається ***дійсною частиною комплексного числа*** і позначається $\boldsymbol{x}=\mathrm{Re}(\boldsymbol{z})$ (від французького *reele* – «дійсний»). Число $\boldsymbol{y}$ називається ***уявною частиною комплексного числа*** і позначається $\boldsymbol{y}=\mathrm{Im}(\boldsymbol{z})$ (від французького *imaginaire* – «уявний»). Рівнозначним записом комплексного числа є запис $z=x+iy$, оскільки добуток дійсного числа $\boldsymbol{y}$ та уявної одиниці $\boldsymbol{i}$ є комутативна операція.

Дійсне число $\boldsymbol{x}$ є окремим випадком комплексного числа $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\boldsymbol{i}$, якщо $\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$.
Якщо ж $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, то комплексне число $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{y}\boldsymbol{i}$ називають ***чисто уявним.***

Числа $\boldsymbol{z}_1=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\boldsymbol{i}$ та $\boldsymbol{z}_2=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\boldsymbol{i}$ називаються ***спряженими числами.***

Приклад 1

Розглянемо комплексне число $\boldsymbol{z_1}=\mathbf{16}+\mathbf{24}\boldsymbol{i}$. Це число має $\mathrm{Re}(\boldsymbol{z})=\mathbf{16}$; $\mathrm{Im}(\boldsymbol{z})=\mathbf{24}$. Спряженим до $\boldsymbol{z_1}$ буде $\boldsymbol{z}_2=16-24\boldsymbol{i}$.

Означення 2

Два числа $\boldsymbol{z_1}=\boldsymbol{x_1}+\boldsymbol{y_1}\boldsymbol{i}$ та $\boldsymbol{z_2}=\boldsymbol{x_2}+\boldsymbol{y_2}\boldsymbol{i}$ називаються **рівними**, якщо рівними є їх дійсні та уявні частини, тобто

$$\mathbf{z_1}=\mathbf{z_2}\Leftrightarrow \mathbf{Re}(\mathbf{z_1})=\mathbf{Re}(\mathbf{z_2}) \text{ та } \mathbf{Im}(\mathbf{z_1})=\mathbf{Im}(\mathbf{z_2}), \text{ або } \boldsymbol{x_1}=\boldsymbol{x_2},$$

$$\boldsymbol{y_1}=\boldsymbol{y_2}.$$

Комплексне число $\boldsymbol{z=0} \Leftrightarrow$ $\mathbf{Re}(\boldsymbol{z})=\mathbf{0}$ та $\mathbf{Im}(\boldsymbol{z})=\mathbf{0}$.

Арифметичні операції на множині C :

якщо $\boldsymbol{z_1 = x_1 + y_1 i}$ та $\boldsymbol{z_2 = x_2 + y_2 i}$ – належать до $\boldsymbol{C}$, то

1. **Сума (різниця)** цих чисел буде:

$$\boldsymbol{z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)}. \qquad (1)$$

2. **Добуток:**

$$z_1 z_2 = (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = x_1 x_2 + x_1 y_2 i + x_2 y_1 i + y_1 y_2 i^2 =$$
$$= x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_2 y_1 + x_1 y_2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_2 y_1 + x_1 y_2). \qquad (2)$$

Зокрема, добуток спряжених чисел $\boldsymbol{z_1 = x + yi}$ та $\boldsymbol{z_2 = x - yi}$ буде дорівнювати:

$$z_1 \cdot z_2 = (x + yi)(x - yi) = xx - xyi + xyi - \underline{yyi^2} = x^2 + y^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{z_1 z_2 = x^2 + y^2}.$$

3. Ділення: для двох комплексних чисел z_1 та z_2 за умови, що $z_2 \neq 0$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} = \frac{(x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i)}{(x_2 + y_2 i)(x_2 - y_2 i)} =$$
$$= \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{(x_2^2 + y_2^2)}. \qquad (3)$$

Приклад 2

Дані комплексні числа $\boldsymbol{z_1 = 12 + 5i}$ та $\boldsymbol{z_2 = 3 - 4i}$.

Знайти $\boldsymbol{z_1 \pm z_2}$, $\boldsymbol{z_1 z_2}$, $\boldsymbol{z_1 / z_2}$.

Розв'язання

$$z_1 + z_2 = (12 + 5i) + (3 - 4i) = (12 + 3) + (5 - 4)i = 15 + i;$$
$$z_1 - z_2 = (12 + 5i) - (3 - 4i) = (12 - 3) + (5 + 4)i = 9 + 9i;$$
$$z_1 z_2 = (12 + 5i)(3 - 4i) = 36 - 48i + 15i - 20i^2 =$$
$$= 36 + 20 - (48 - 15)i = 56 - 33i;$$

$$\frac{12+5i}{3-4i}=\frac{(12+5i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}=\frac{36+48i+15i-20}{9+16}=\frac{16+63i}{25}=$$

$$=\frac{16}{25}+\frac{63}{25}i\approx 0.64+2.52i\,.$$

Відомо, що дійсні числа геометрично подаються, як точки числової прямої.

Комплексні числа геометрично відображаються точками ***координатної площини ОХУ.*** Площина називається ***комплексною***, якщо кожному комплексному числу $\boldsymbol{z=x+yi}$ ставиться у взаємно однозначну відповідність точка площини $\boldsymbol{z(x,y)}$. (Рис. 1).

Осі **ОХ** та **ОУ**, на яких розміщені дійсні числа $\boldsymbol{z=x+0\cdot i}$ та уявні числа $\boldsymbol{z=0+yi}$ відповідно називаються дійсною та уявною осями.

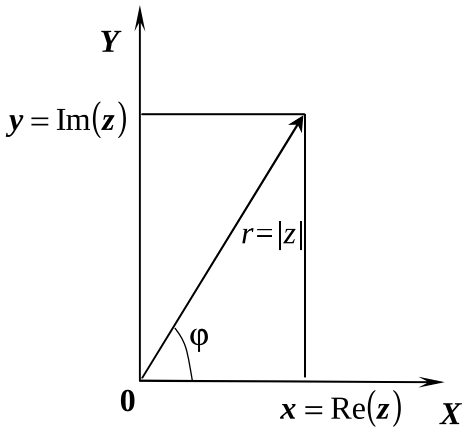


Рисунок 1

7.2 Три форми подання комплексного числа

Залежно від використання комплексні числа можуть бути поданими у трьох різних формах: алгебраїчній, тригонометричній і показниковій (експоненціальній).

а) Алгебраїчна форма комплексного числа

У попередньому пункті комплексне число $\boldsymbol{z}$ розглядалося в алгебраїчній формі. Отже, ***алгебраїчною формою комплексного числа $\boldsymbol{z}$*** є форма

$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{i}$, де $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}$.

б) Тригонометрична форма комплексного числа

З кожною точкою $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ комплексної площини $\boldsymbol{OXY}$, отже, і з числом $z = x + iy$, пов'язаний радіус-вектор цієї точки, довжина якого $\boldsymbol{r}$ називається ***модулем комплексного числа $\boldsymbol{z}$*** і позначається $\boldsymbol{r} = |\boldsymbol{z}|$ (рис. 1). Якщо $\boldsymbol{x}$ – проекція радіус-вектора на вісь $\boldsymbol{OX}$, а $\boldsymbol{y}$ – його проекція на вісь $\boldsymbol{OY}$, то довжину цього вектора можна знайти за теоремою Піфагора:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}\ . \tag{4}$$

Винесемо модуль перед комплексним числом, поданим в алгебраїчній формі (4), отримаємо:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}i\right) =$$

$$= r\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}i\right).$$

Із рисунка 1 видно, що кут φ між радіус-вектором числа $\boldsymbol{z}$ і віссю OX має такі тригонометричні характеристики:

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad tg\varphi = \frac{y}{x}. \tag{5}$$

Отже, комплексне число $\boldsymbol{z}$ можна записати у **тригонометричній** формі:

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{r} \cdot (\cos\varphi + \boldsymbol{i}\sin\varphi). \tag{6}$$

Кут φ називають ***аргументом*** комплексного числа $\boldsymbol{z}$ і позначають $\boldsymbol{Arg}(\boldsymbol{z})$. З множини значень аргументу комплексного числа виділяють ***головне*** значення аргументу і позначають його $\arg \boldsymbol{z}$. Головне значення аргументу – це кут, який відповідає вимозі:

$$-\pi \le \arg z \le \pi \ .$$

Приклад 1

1. $z = 1 + i, \quad r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \quad z = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i\right),$

отже,

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad tg\varphi = 1;$$

$$Arg\, z = \varphi = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k = 0, \pm1, \pm2 \pm 3\ldots, \quad \arg z = \frac{\pi}{4},$$

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

2. $z = 1, \quad r = \sqrt{1} = 1, \quad z = 1(1 + 0i),$

отже,

$$\cos\varphi = 1, \quad \sin\varphi = 0, \quad tg\varphi = 0;$$
$$Arg\, z = \varphi = 2\pi k, \quad k = 0, \pm1, \pm2 \pm 3\ldots, \quad \arg z = 0,$$
$$z = 1(\cos 0 + i\sin 0) = \cos 0 + i\sin 0;$$

3. $z = i, \quad r = \sqrt{1} = 1, \quad z = 1(0 + 1i),$

$$\cos\varphi = 0, \quad \sin\varphi = 1, \quad tg\varphi = \infty;$$

$$Arg\, z = \varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k = 0, \pm1, \pm2 \pm 3\ldots, \quad \arg z = \frac{\pi}{2},$$

$$z = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}.$$

Сформулюємо деякі властивості операцій над комплексними числами в тригонометричній формі:

1. Щоб додати (відняти) комплексні числа треба додати (відняти) їх радіус вектори за правилом паралелограма.

Зауваження

Додавання (віднімання), як правило, легше робити з алгебраїчною формою комплексного числа.

2. Модуль добутку (відношення) двох комплексних чисел дорівнює добутку (відношенню) модулів цих чисел, а його аргумент – додатку (різниці) аргументів цих чисел.

Якщо $z = z_1 z_2$, то $|z| = r_1 r_2 = |z_1||z_2|$,

$$Arg\, z = \varphi_1 + \varphi_2 = Arg\, z_1 + Arg\, z_2 \tag{7}$$

Доведення:

Нехай

$$z_1 = r_1(\cos\alpha + i\sin\alpha), \quad z_2 = r_2(\cos\beta + i\sin\beta),$$

тобто r_1, r_2 – модулі відповідальних комплексних чисел, $\alpha = Arg\, z_1$, $\beta = Arg\, z_2$,

тоді

$$z_1 z_2 = r_1(\cos\alpha + i\sin\alpha)\cdot r_1(\cos\beta + i\sin\beta) =$$
$$= r_1 \cdot r_2\left(\cos\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta\cdot i + \cos\beta\cdot\sin\alpha\cdot i + \sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot(i)^2\right) =$$
$$= r_1 \cdot r_2((\cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta) + (\cos\alpha\cdot\sin\beta + \cos\beta\cdot\sin\alpha)\cdot i) =$$
$$= r_1 \cdot r_2(\cos(\alpha+\beta) + i\cdot\sin(\alpha+\beta)),$$

що і треба було довести.

Якщо $z = \dfrac{z_1}{z_2}$, $(z_2 \neq 0)$, то $|z| = \dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, $|z_2| = r_2 \neq 0$,

$$Arg\, z = \varphi_1 - \varphi_2 = Arg\, z_1 - Arg\, z_2. \tag{8}$$

Доведення:

Нехай

$$z_1 = r_1(\cos\alpha + i\sin\alpha), \quad z_2 = r_2(\cos\beta + i\sin\beta),$$

тоді

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\alpha+i\sin\alpha)}{r_2(\cos\beta+i\sin\beta)}=\frac{r_1(\cos\alpha+i\sin\alpha)\cdot(\cos\beta-i\sin\beta)}{r_2(\cos\beta+i\sin\beta)\cdot(\cos\beta-i\sin\beta)}=$$

$$=\frac{r_1\left(\cos\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta\cdot i+\cos\beta\cdot\sin\alpha\cdot i-\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot(i)^2\right)}{r_1\left(\cos^2\beta+\sin^2\beta\right)}=$$

$$=\frac{r_1\left((\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta)+(\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta)\cdot i\right)}{r_2}=$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\alpha-\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right),$$

що треба було довести.

Приклад 2

Комплексні числа $z=-1+i$ та $u=\sqrt{3}+i$ подати в тригонометричній формі та знайти $v=z\cdot u,\quad c=\dfrac{z}{u}$

Розв'язання

За формулою (4) знайдемо модуль комплексного числа z:

$$r_1=|z|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}\,.$$

Із співвідношень (5) знайдемо

$$\cos\varphi=\frac{-1}{\sqrt{2}},\quad \sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad tg\varphi=-1.$$

Опираючись на відомі кути, маємо

$$Argz\,z=\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\quad k=0,\pm1,\pm2,\pm3\ldots,$$

головне його значення $\arg z=\dfrac{3\pi}{4}$.

Отже, $z=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

Аналогічно для u.

$$r_2=|u|=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2\,.$$

Із співвідношень (5) знайдемо

$$\cos\psi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\psi = \frac{1}{2}, \quad tg\,\psi = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Опираючись на відомі кути, маємо

$$Arg\,u = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\ldots,$$

головне його значення $\arg u = \frac{\pi}{6}$.

Отже, $u = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

Тепер виконаємо дії

1. $|zu| = |z||u| = 2\sqrt{2}$,

$$\arg zu = \arg z + \arg u = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = \frac{9\pi + 2\pi}{12} = \frac{11}{12}\pi,$$

отже,

$$zu = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{11}{12}\pi + i\sin\frac{11}{12}\pi\right).$$

2. $\left|\frac{z}{u}\right| = \frac{|z|}{|u|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$\arg\left|\frac{z}{u}\right| = \arg z - \arg u = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{9\pi - 2\pi}{12} = \frac{7\pi}{12},$$

отже,

$$\frac{z}{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{7}{12}\pi + i\sin\frac{7}{12}\pi\right).$$

в) Показникова форма комплексного числа

Великий вчений Ейлер вивів таку формулу зв’язку між тригонометричними функціями та експоненціальною функцією $\boldsymbol{e}^x$:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Завдяки цій формулі, комплексні числа можна подати ще в одній формі – показниковій:

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{r}(\cos\boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{i}\sin\boldsymbol{\varphi}) = \boldsymbol{r}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i\varphi}}.$$

Наприклад, $z = \sqrt{3} + i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2e^{\frac{\pi}{6}i}$.

У показниковій формі теж легко проводити операції множення та ділення комплексних чисел:

Нехай $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{r_1 e^{i\varphi}}$, а $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{r_2 e^{i\psi}}$, тоді

$$zu = |z|e^{i\varphi}|u|e^{i\psi} = |z||u|e^{i(\varphi+\psi)}, \quad \frac{z}{u} = \frac{|z|}{|u|}\frac{e^{i\varphi}}{e^{i\psi}} = \frac{|z|}{|u|}e^{i(\varphi-\psi)}.$$

7.3 Піднесення до степені та добування кореня з комплексного числа. Формула Муавра

Використовуючи тригонометричну та експоненціальну форми комплексних чисел, можна легко підносити комплексні числа до любої степені.

Нехай комплексне число задано в показниковій формі:

$$\boldsymbol{z} = |\boldsymbol{z}|\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i\varphi}}.$$

Піднести дане число до степені $\boldsymbol{n} \in \boldsymbol{Z}$

$$\boldsymbol{z^n} = \left(|\boldsymbol{z}|\boldsymbol{e^{i\varphi}}\right)^{\boldsymbol{n}} = \left(|\boldsymbol{z}|\right)^{\boldsymbol{n}}\left(\boldsymbol{e^{i\varphi}}\right)^{\boldsymbol{n}} = \left(|\boldsymbol{z}|\right)^{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{e^{in\varphi}}.$$

Якщо результат перевести в тригонометричну форму, отримаємо:

$$z^n = \left(|z|\right)^n e^{in\varphi} = \left(|z|\right)^n\left(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\right). \qquad (9)$$

Отже, вірним буде **правило для піднесення комплексного числа до довільної степені:**

для того, щоб **піднести** до довільної степені комплексне число в тригонометричній формі, необхідно **піднести** до цієї степені **модуль** числа та **помножити** на показник степені **аргумент** числа.

Формулу (9) називають **формулою Муавра для піднесення комплексного числа до цілої степені.**

Приклад 1

Знайти $(-1+i)^{20}$.

Розв'язання

У прикладі 4 ми отримали, що

$$z=-1+i=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right),$$

отже, згідно з формулою Муавра

$$z^{20}=\left(\sqrt{2}\right)^{20}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\cdot 20\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\cdot 20\right)\right)=$$

$$=2^{10}\left(\cos(15\pi)+i\sin(15\pi)\right)=2^{10}\left(\cos(\pi)+i\sin(\pi)\right)=$$

$$=2^{10}\left(-1+i0\right)=-2^{10}=-1024.$$

Добування кореня степені n з комплексного числа $z=a+bi$.

Щоб знайти формулу для обчислення дійсної та уявної частин комплексного числа $\boldsymbol{u+vi=\sqrt[n]{a+bi}}$, виконаємо спочатку протилежну дію – піднесемо число $\boldsymbol{u+vi=\sqrt[n]{a+bi}}$ до $\boldsymbol{n}$ -ї степені: $\boldsymbol{a+bi=(u+vi)^n}$.

Для піднесення комплексного числа до цілої степені $\boldsymbol{n}$, як ми вже знаємо, справедлива формула Муавра.

Подамо обидва числа в тригонометричній формі:

$$a+bi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

де $r=\sqrt{a^2+b^2}$ – модуль даного комплексного числа,

φ – його аргумент,

$$\varphi=Arg(a+bi)=\arg(a+bi)+2\pi k,\ k\in Z.$$

$$u+vi=r_1(\cos\psi+i\sin\psi),$$

де $r_1=\sqrt{u^2+v^2}$ – модуль даного комплексного числа,

ψ – його аргумент,

$$\psi = Arg(u+vi) = \arg(u+vi) + 2\pi k\,,\ k \in Z\,.$$

Отже, (10) з використання тригонометричної форми обох чисел можна записати так:
$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \left(r_1(\cos\psi + i\sin\psi)\right)^n$, або, використовуючи формулу Муавра,
$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = (r_1)^n(\cos n\psi + i\sin n\psi)$.

Вище ми визначили, що два комплексних числа рівні, якщо в них рівні дійсні і уявні частини відповідно. Тобто

$$r\cos\varphi = r_1^n\cos n\psi;\quad r\sin\varphi = r_1^n\sin n\psi\,.$$

З останніх рівностей отримуємо: $r = r_1^n$; $\varphi = n\psi$, або

$$r_1 = \sqrt[n]{r},\ \ \psi = \frac{\varphi}{n} = \frac{\arg(a+bi)+2\pi k}{n}\,. \tag{10}$$

Отже, вірним буде **правило для добування кореня довільної степені з комплексного числа:**

для того, щоб **добути** корінь довільної степені з комплексного числа в тригонометричній формі, необхідно **добути** корінь цієї степені з **модуля** числа та **поділити** на показник степені **аргумент** числа $\varphi = \arg z + 2\pi k$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\arg z + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\arg z + 2\pi k}{n}\right). \tag{11}$$

Треба пам'ятати, що серед множини чисел C **кількість коренів** числа **співпадає з показником степені кореня,** який з цього числа добувається.

Тому формулу добування кореня вірним буде подати так:

$$\sqrt[n]{z} == \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\arg z + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\arg z + 2\pi k}{n}\right), \tag{12}$$

де $k = 0,1,2,\ldots,(n-1)$.

Приклад 2

Знайти $\sqrt[3]{-1+i}$.

Розв'язання

У прикладі 4 ми отримали, що

$$z=-1+i=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi k\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi k\right)\right),$$

отже, згідно з формулою (12)

$$\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{\left(\sqrt{2}\right)}\left(\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{3}\right)\right)=$$

$$=\sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{12}+\frac{2\pi k}{3}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{12}+\frac{2\pi k}{3}\right)\right),$$

де $k=0,1,2$.

Отримали загальну формулу для 3-х коренів з числа $z=-1+i$.
Знайдемо всі 3 кореня:

$k=0$

$$q_1=\sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{12}\right)\right)=\sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=\sqrt[5]{2}(1+i);$$

$k=1$

$$q_2=\sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\right)\right)=$$

$$=\sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right);$$

$k=2$

$$q_3=\sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{12}+\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{12}+\frac{4\pi}{3}\right)\right)=$$

$$=\sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{19\pi}{12}\right)\right)=\sqrt[6]{2}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right)=$$

$$=\sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)-i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right).$$

На комплексній площині ці корені будуть подаватися, як три точки на колі з радіусом $r=\sqrt[6]{2}$, які залишить відповідний радіус-вектор, обертаючись на кути $\pi/4$, $11\pi/12$ та $(-5\pi/12)$.

РОЗДІЛ 2
ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ І АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

§ 1 МАТРИЦІ І ВИЗНАЧНИКИ

1.1 Матриці. Операції над матрицями

1.1.1 Основні означення

Означення 1

Прямокутною матрицею розміру $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$ називається сукупність $(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n})$ чисел, розміщених у вигляді прямокутної таблиці. Об'єкти можуть мати довільну природу. У даному курсі розглядаються ***матриці дійсних чисел.*** Таблиця має $\boldsymbol{m}$ рядків і $\boldsymbol{n}$ стовпців. Позначаються матриці великими літерами латинського алфавіту. Ми будемо записувати матрицю у вигляді

$$\underset{m\times n}{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

або скорочено у вигляді $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a_{ij}})$, $(\boldsymbol{i} = \overline{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{m}};\ \boldsymbol{j} = \overline{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{n}})$. Числа a_{ij}, які складають дану матрицю, називаються її елементами. **Перший** індекс указує на номер **рядка матриці**, другий - на номер **стовпця**.

Наприклад,

$$\underset{2\times 3}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Тут A – матриця розміром у 2 рядки і 3 стовпці, а елементи $a_{11} = 1,\ a_{12} = 0,\ a_{13} = -3$ – елементи першого рядка матриці A.

Крім круглих дужок, існують ще такі позначення для матриць: $[\ ], \|\ \|$.

Матриці широко використовують в економічних моделях.

Приклад

Мале підприємство виробляє 4 види продукції – $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ та $\boldsymbol{D}$, використовуючи на них різну кількість двох матеріалів та трудових ресурсів (кількість робочих годин). Числові дані зведені в таблицю.

Таблиця 1.1

Вироби	***A***	***B***	***C***	***D***
Кількість одиниць матеріалу X	250	289	150	189
Кількість одиниць матеріалу Y	160	176	67	0
Кількість витрачених робочих годин	80	78	150	100

Дані такої таблиці можна розмістити в прямокутній матриці, розміром 3х4:

$$\underset{3\times4}{A}=\begin{pmatrix}250 & 289 & 150 & 189\\ 160 & 176 & 67 & 0\\ 80 & 78 & 150 & 100\end{pmatrix}.$$

Кожен елемент цієї матриці має певний зміст. Наприклад, $a_{23}=67$ вказує яку кількість матеріалу $\boldsymbol{Y}$ витрачає підприємство на виготовлення продукції $\boldsymbol{C}$.

Означення 2

Дві матриці $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a_{ij}})$ і $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{b_{ij}})$ **однакового розміру** називаються ***рівними***, якщо попарно рівні їхні елементи, які стоять на однакових місцях, тобто

$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$, якщо $\boldsymbol{a_{ij}}=\boldsymbol{b_{ij}}$.

Матриця, яка складається з одного рядка або одного стовпця, називається відповідно ***матрицею-рядком*** або ***матрицею-стовпцем***. Матриці-стовпці й матриці-рядки називають *векторами*.

Наприклад,

$$A=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$$ – матриця-стовпець розмірністю 4х1,

$B=\begin{pmatrix}0 & -1 & 56\end{pmatrix}$ – матриця-рядок розмірністю 1х3.

Матриця, що складається з одного числа, ототожнюється із цим числом. Матриця розміру $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$, всі елементи якої дорівнюють нулю, називаються ***нульовою матрицею*** й позначається:

$$D=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$ – нульова матриця 2х4.

Матриця називається ***квадратною порядку*** $\boldsymbol{n}$, якщо кількість її рядків співпадає з кількістю стовпців:

$$\underset{n\times n}{F}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \underset{2\times 2}{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & -1 \end{pmatrix}.$$

Елементи матриці з однаковими індексами $\boldsymbol{a_{ii}}$, $i=\overline{1,n}$, створюють **головну** діагональ матриці, а елементи з індексами, які змінюються у протилежному напрямку: $\boldsymbol{a_{ij}}$ $i=\overline{1,n}$ $j=\overline{n,1}$ створюють **допоміжну** діагональ.

Квадратні матриці, у яких відмінні від нуля лише елементи головної або допоміжної діагоналей, називаються ***діагональними матрицями*** й записуються так:

$$\underset{n\times n}{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n\,n} \end{pmatrix},.\ \underset{n\times n}{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Якщо всі елементи $\boldsymbol{a_{ii}}$ діагональної матриці дорівнюють 1, то матриця називається ***одиничною*** й позначається буквою $\boldsymbol{E}$:

$$E=\begin{pmatrix} 1 \;\; 0 \; \dots 0 \\ 0 \;\; 1 \; \dots 0 \\ \dots\dots\dots \\ 0 \;\; 0 \; \dots 1 \end{pmatrix}.$$

Квадратна матриця називається ***трикутною***, якщо всі елементи, що стоять вище (або нижче) головної діагоналі, дорівнюють нулю.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Транспонуванням називається таке перетворення матриці, при якому рядки й стовпці міняються місцями зі збереженням їхніх номерів. Позначається транспонування значком $\boldsymbol{T}$ нагорі.

Нехай дана матриця (1.1). Переставимо рядки зі стовпцями. Одержимо матрицю

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

яка буде транспонованою відносно матриці $\boldsymbol{A}$. Зокрема, при транспонуванні вектора-стовпця виходить вектор-рядок і навпаки.

1.1.2 Операції над матрицями

Означення

Добутком прямокутної матриці $\boldsymbol{A}$ на будь - яке число $\lambda \in R$ називається матриця $\boldsymbol{C}$ такого самого розміру, кожний елемент якої є добутком відповідного елемента матриці $\boldsymbol{A}$ на число λ:

$$C = \lambda A = (\lambda a_{ij}), \quad i = \overline{1,n} \quad j = \overline{1,m},$$

або для $m = 3; n = 3: A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \quad \lambda \in R;$

$$C = \lambda \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{pmatrix}.$$

Сумою (різницею) двох матриць $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a_{ij}})$ і $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{b_{ij}})$, $i = \overline{1,n}$ $j = \overline{1,m}$ ***одного розміру*** називається матриця $\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{c_{ij}})$ такого самого розміру, елементи якої визначаються за формулою

$$\boldsymbol{c_{ij}} = \boldsymbol{a_{ij}} \pm \boldsymbol{b_{ij}}.$$

Операція алгебраїчного додавання матриць

– комутативна, тобто

$$\underset{m\times n}{C} = \underset{m\times n}{A} + \underset{m\times n}{B} = \underset{m\times n}{B} + \underset{m\times n}{A}, \quad \underset{m\times n}{C} = \underset{m\times n}{A} - \underset{m\times n}{B} = \underset{m\times n}{A} + \left(-\underset{m\times n}{B}\right) = -\underset{m\times n}{B} + \underset{m\times n}{A};$$

– асоціативна:

$$\underset{m\times n}{D} = \underset{m\times n}{A} + \underset{m\times n}{B} + \underset{m\times n}{C} = \left(\underset{m\times n}{A} + \underset{m\times n}{B}\right) + \underset{m\times n}{C} = \underset{m\times n}{A} + \left(\underset{m\times n}{B} + \underset{m\times n}{C}\right);$$

– дистрибутивна відносно множення на число:

$$\underset{m\times n}{C} = \lambda\left(\underset{m\times n}{A} + \underset{m\times n}{B}\right) = \lambda \cdot \underset{m\times n}{A} + \lambda \cdot \underset{m\times n}{B}.$$

Добуток AB матриці $\boldsymbol{A}$ на матрицю $\boldsymbol{B}$ визначається в припущенні, що число стовпців матриці $\boldsymbol{A}$ дорівнює числу рядків матриці $\boldsymbol{B}$**,** тобто для існування добутку матриць $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ необхідно, щоб вони мали розмірності $\boldsymbol{m \times k}$ і $\boldsymbol{k \times n}$ відповідно.

Добутком $\boldsymbol{C = A \cdot B}$ двох матриць $\underset{m\times k}{A} = (a_{ij})$; $i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,k}$ і $\underset{k\times n}{B} = (b_{j,l})$; $j = \overline{1,k}$; $l = \overline{1,n}$ називається матриця $\underset{m\times n}{C} = (c_{i,l})$; $i = \overline{1,m}$; $l = \overline{1,n}$, елементи якої визначаються за правилом:

$$c_{il} = a_{i1}b_{1l} + a_{i2}b_{2l} + a_{i3}b_{3l} + \ldots + a_{ik}b_{kl} = \sum_{s=1}^{k} a_{is}b_{sl}, \tag{1.2}$$

де $i = \overline{1,m}$; $l = \overline{1,n}$.

Іншими словами, елементи матриці-добутку визначаються в такий спосіб: елемент, який стоїть на перетині ***i-го*** рядка і ***l-го*** стовпця матриці $\boldsymbol{C}$ дорівнює сумі добутків елементів ***i-го*** рядка матриці $\boldsymbol{A}$ на відповідні елементи ***l-го*** стовпця матриці $\boldsymbol{B}$.

Операція множення для матриць загалом ***не комутативна:*** $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$. Але існують матриці, для яких таки $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$. Такі матриці називаються ***комутуючі***. Прикладом такої матриці є одинична матриця – операція множення любої квадратної матриці $\underset{n\times n}{A}$ на відповідну до неї одиничну матрицю $\underset{n\times n}{E}$ ***комутативна.*** Завжди $\boldsymbol{AE} = \boldsymbol{EA}$.

Приклад 1

Знайти добутки $\boldsymbol{AB}$ та $\boldsymbol{BA}$ матриць $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ і $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Розв’язання

Маємо матрицю $\boldsymbol{A}$ розміром 2×3, матрицю $\boldsymbol{B}$ розміром 3×3, тоді добуток $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ існує і елементи матриці $\boldsymbol{C}$ знаходяться таким чином:

$$c_{11} = 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 1\cdot 3 = 8, c_{12} = 1\cdot 2 + 2\cdot 0 + 1\cdot 5 = 7, c_{13} = 1\cdot 3 + 2\cdot 1 + 1\cdot 4 = 9$$

$$c_{21} = 3\cdot 1 + 1\cdot 2 + 0\cdot 3 = 5, c_{22} = 3\cdot 2 + 1\cdot 0 + 0\cdot 5 = 6, c_{23} = 3\cdot 3 + 1\cdot 1 + 0\cdot 4 = 10$$

$$AB = \underset{2\times 3}{C} = \underset{2\times 3}{A}\cdot \underset{3\times 3}{B} = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 \\ 5 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

Добуток $B \cdot A$ не існує, оскільки матриця $\boldsymbol{B}$ має більше стовпців, ніж у матриці $\boldsymbol{A}$ рядків.

Приклад 2

У таблиці зазначена кількість одиниць продукції, що відвантажується щодня на молокозаводах 1 і 2 у магазини $М_1$, $М_2$ і $М_3$, причому доставка одиниці продукції з кожного молокозаводу в магазин M_1 коштує 50 гр. од., у магазин M_2 – 70, а в M_3 – 130 гр. од. Підрахувати щоденні транспортні витрати кожного заводу.

Таблиця 1.2

Молокозавод	**Магазин**		
	M_1	**M_2**	**M_3**
1	20	35	10
2	15	27	8

Розв'язання

Позначимо через ***A*** матрицю, дану нам в умові, а через ***B*** – матрицю, що характеризує вартість доставки одиниці продукції в магазини, тобто,

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 35 & 10 \\ 15 & 27 & 8 \end{pmatrix}, \; B = (50, 70, 130).$$

Тоді матриця витрат на перевезення можна обчислити так:

$$AB = \begin{pmatrix} 20 & 35 & 10 \\ 15 & 27 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 70 \\ 130 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20\cdot 50 + 35\cdot 70 + 10\cdot 130 \\ 15\cdot 50 + 27\cdot 70 + 8\cdot 130 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4750 \\ 3680 \end{pmatrix}.$$

Отже, перший завод щодня витрачає на перевезення 4750 гр. од., другий - 3680 гр. од.

Приклад 3

Підприємство з шиття верхнього одягу виробляє зимові пальто, демісезонні пальто й плащі. Плановий випуск за декаду характеризується рядком $X = (10, 15, 23)$, тобто план випуску за декаду зимових пальт становить 10 од., демісезонних пальто – 15 од. та плащів – 23од. Для шиття продукції використовуються тканини чотирьох типів T_1, T_2, T_3, T_4. У таблиці 1.3 наведені норми витрати тканини (у метрах) на кожний виріб. Рядок ***C*** = (40, 35, 24, 16) задає вартість метра тканини кожного типу, а рядок $\boldsymbol{P}$ = (5, 3, 2, 2) - вартість доставки метра тканини кожного типу до підприємства.

Таблиця 1.3

Виріб	Витрата тканини			
	T_1	T_2	T_3	T_4
Зимове пальто	5	1	0	3
Демісезонне пальто	3	2	0	2
Плащ	0	0	4	3

Знайти:

1) Скільки метрів тканини кожного типу буде потрібно для виконання плану?
2) Знайти вартість тканини, що витрачається на пошиття виробу кожного типу;
3) Визначити вартість всієї тканини, необхідної для виконання плану;
4) Обчислити вартість всієї тканини з урахуванням її доставки до підприємства.

Розв'язання

Позначимо через $\boldsymbol{A}$ матрицю витрат тканини кожного з типів на пошив одиниці продукції кожного виду, дану в умові, тобто,

$$\underset{3\times 4}{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

відповідно кількість видів продукції – 3, типів тканини - 4.

Для знаходження кількості метрів тканини, необхідної для виконання плану, потрібно рядок ***X (план)*** помножити на матрицю ***A (норма витрат на 1 од.)***:

$$\underset{1\times 4}{D} = \underset{1\times 3}{X} \cdot \underset{3\times 4}{A} = \begin{pmatrix} 10 & 15 & 23 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} =$$

$= (10\cdot 5+15\cdot 3;\ 10\cdot 1+15\cdot 2, 23\cdot 4;\ 10\cdot 3+15\cdot 2+23\cdot 3) =$
$= (95\ \ 40\ \ 92\ \ 129)$.

Вартість тканини, що витрачається на пошиття виробу кожного виду знайдемо, перемноживши матрицю ***A*** та стовпець ***C^T*** ***(стовпець вартості одиниці тканини кожного типу):***

$$A\cdot C^T = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 35 \\ 24 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot 40+1\cdot 35+0\cdot 24+3\cdot 16 \\ 3\cdot 40+2\cdot 35+0\cdot 24+2\cdot 16 \\ 0\cdot 40+0\cdot 35+4\cdot 24+3\cdot 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 283 \\ 222 \\ 144 \end{pmatrix}.$$

Вартість всієї тканини, необхідної для виконання плану, визначиться за формулою

$$D\cdot C^T = (95\ 40\ 92\ 129)\cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 35 \\ 24 \\ 16 \end{pmatrix} =$$

$= 95\cdot 40+40\cdot 35+92\cdot 24+129\cdot 16 = 9472$ грош. од.

Транспортні витрати обчислимо, помноживши рядок кількості тканини кожного типу, необхідної для виконання плану D на транспонований рядок вартості доставки 1-го метру тканини кожного типу P^T:

$$D\cdot P^T = (95\ \ 40\ \ 92\ \ 129)\cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$= 95\cdot 5+40\cdot 3+92\cdot 2+129\cdot 2 = 1037$ грош. од.

Нарешті, вся сума буде дорівнювати вартості тканини, тобто 9472 грош. од., плюс витрати на доставку тканини 1037 грош. од.

Отже, $DC^T + DP^T = 9472+1037 = 10509$ грош. од.

Висновок

У даному пункті 1.2 ми дали означення такому математичному інструменту, як ***матриця*** і визначили на множині матриць ***операції алгебраїчної суми*** та ***добутку***.

Для визначення операції, подібної з діленням на множині $\boldsymbol{R}$, нам треба визначити важливу ***характеристику*** матриці **–** ***її визначник***.

1.2 ВИЗНАЧНИКИ

1.2.1 ОСНОВНІ ОЗНАЧЕННЯ. МЕТОДИ ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧНИКІВ. РОЗКЛАДАННЯ ВИЗНАЧНИКІВ ЗА РЯДКОМ АБО СТОВПЦЕМ

Визначник (або детермінант) є основною числовою характеристикою матриці. Визначник існує **лише для квадратної матриці**.

Означення 1

Визначником (детермінантом) квадратної числової матриці $\boldsymbol{A}$ розміром $n \times n$ називається **число**, яке є сумою $\boldsymbol{n}!$ доданків, кожен з яких отриманий з $\boldsymbol{n}$ елементів цієї матриці за певними правилами. Позначають визначник матриці $\boldsymbol{A} : |\boldsymbol{A}|$, або $\Delta\boldsymbol{A}$, або $\det \boldsymbol{A}$ і називають ***визначником (детермінантом) порядку n***.

Правило знаходження визначників 2-го порядку: визначник другого порядку складається з $\mathbf{2!=1\cdot 2}$ доданків і дорівнює різниці добутків елементів головної на допоміжної діагоналей.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1.5}$$

(–) (+)

Приклад 1

Знайти визначники матриць

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 0 & 2\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & -4\end{pmatrix}.$$

Розв'язання

$$\det A=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{vmatrix}=5-6=-1;\quad \det B=\begin{vmatrix}-1 & 4\\ 0 & 2\end{vmatrix}=-2=-2;$$

$$\det C=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & -4\end{vmatrix}=4-4=0.$$

Правило знаходження визначників 3-го порядку

Визначник третього порядку складається з $\mathbf{3!=1\cdot 2\cdot 3=6}$ доданків і знаходиться за формулою:

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13}-$$

$$\left(-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{23}a_{32}a_{11}\right). \tag{1.6}$$

Схематично правило обчислення визначника 3-го порядку зобразимо так.

Перші три додатні доданки отримуються за схемою

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13}\,. \tag{1.7}$$

Отримана сума входить до обчислення визначника з тим знаком, який отримали при додаванні.

Останні три доданки отримуються за схемою:

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{13}a_{22}a_{31}+a_{12}a_{21}a_{33}+a_{23}a_{32}a_{11}\,. \tag{1.7*}$$

Отримана сума входить до обчислення визначника із знаком, протилежним тому, який отримали при додаванні.

Така схема обчислення визначника 3-го порядку називається ***правилом Саріуса.***

Існує й модифікована схема ***правила Саріуса:***

$$\begin{array}{c}\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right| \\ \begin{array}{ccccc} \phantom{a_{11}} & \phantom{a_{12}} & (+) & (+) & (+) \end{array}\end{array} = \boldsymbol{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} = S_1}, \tag{1.8}$$

$$\begin{array}{c}\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right| \\ \begin{array}{ccccc} (-) & (-) & (-) & \phantom{a_{31}} & \phantom{a_{32}} \end{array}\end{array} = \boldsymbol{-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} = S_2}, \tag{1.8*}$$

$\Delta \boldsymbol{A} = \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2$.

Для обчислення визначників порядку $\boldsymbol{n}$ необхідно означити ще деякі величини.

Означення 2

Мінором M_{ij} елемента $\boldsymbol{a_{ij}}$ визначника $\Delta\boldsymbol{A}$ ***n-го*** порядку називається визначник $(\boldsymbol{n}-1)$-го порядку, отриманий із $\Delta\boldsymbol{A}$ **викреслюванням *і-го*** рядка й ***j-го*** стовпця, які містять даний елемент.

Алгебраїчним доповненням елемента $\boldsymbol{a_{ij}}$ визначника $\Delta\boldsymbol{A}$ називається його мінор $\boldsymbol{M_{ij}}$, узятий зі знаком $(-1)^{\boldsymbol{i+j}}$. Алгебраїчне доповнення елемента $\boldsymbol{a_{ij}}$ будемо позначати $\boldsymbol{A_{ij}}$. Таким чином, $\boldsymbol{A_{ij}} = (-1)^{\boldsymbol{i+j}}\boldsymbol{M_{ij}}$.

Способи практичного обчислення визначників, засновані на тому, що визначник порядку $\boldsymbol{n}$ може бути виражений через визначники більше низьких порядків, дає наступна теорема.

Теорема Лапласа (розкладання визначника по рядку або стовпцю)

Визначник квадратної матриці $\underset{nxn}{A}$ дорівнює сумі добутків всіх елементів довільного його рядка (або стовпця) на їхні алгебраїчні доповнення. Інакше кажучи, має місце ***розкладання*** $\Delta \boldsymbol{A}$ за елементами ***i-го рядка***

$$\Delta \boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_{i1}\boldsymbol{A}_{i1} + \boldsymbol{a}_{i2}\boldsymbol{A}_{i2} + \ldots + \boldsymbol{a}_{in}\boldsymbol{A}_{in}, \ \left(\boldsymbol{i} = \overline{1,\boldsymbol{n}}\right), \tag{1.9}$$

або ***j - го стовпця***

$$\Delta \boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_{1j}\boldsymbol{A}_{1j} + \boldsymbol{a}_{2j}\boldsymbol{A}_{2j} + \ldots + \boldsymbol{a}_{nj}\boldsymbol{A}_{nj}, \ \left(\boldsymbol{j} = \overline{1,\boldsymbol{n}}\right). \tag{1.9*}$$

Зокрема, якщо всі елементи рядка (або стовпця), крім одного, дорівнюють нулю, то визначник дорівнює цьому елементу, помноженому на його алгебраїчне доповнення.

Приклад 2

Обчислити визначник $\Delta \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 5 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, розклавши його по елементах другого стовпця.

Розв'язання

Розкладемо визначник по елементах другого стовпця

$$\Delta A = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} =$$

$$= (-2)\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 5\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -20.$$

Приклад 3

Обчислити визначник

$\Delta A = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & 0 \\ \hline a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$, у якому всі елементи по одну сторону від головної діагоналі дорівнюють нулю.

Розв'язання

Розкладемо визначник A по першому рядку:

$$\Delta A = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \dots 0 \\ a_{32} & a_{33} & \dots 0 \\ \hdashline a_{n2} & a_{n3} & \dots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Визначник, що стоїть праворуч, можна знову розкласти по першому рядку, тоді одержимо:

$$\Delta A = a_{11}\cdot a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \dots 0 \\ a_{43} & a_{44} & \dots 0 \\ \hdashline a_{n3} & a_{n4} & \dots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

І так далі. Після $\boldsymbol{n}$ кроків прийдемо до рівності $\Delta A = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$.

Для ефектного використання методу обчислення визначника шляхом розкладання його за рядком чи стовпцем треба знати правила, за якими елементи визначника можна перетворювати, не змінюючи його значення. Такі перетворення називаються ***еквівалентними*** і базуються на властивостях визначника.

1.2.2 Властивості визначників

1. Визначник не міняється при транспонуванні, тобто $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}|$.

2. Якщо один з рядків (стовпців) визначника складається з *нулів*, то визначник *дорівнює нулю.*

Це випливає з розкладання визначника по нульовому рядку (стовпцю).

3. Якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) визначника помножити на деяке число $\boldsymbol{k}$, то сам визначник помножиться на $\boldsymbol{k}$.

Нехай визначник вихідної матриці дорівнює Δ. Помножимо будь - який його рядок (нехай 1-й) на число $\boldsymbol{k}$. Отримаємо новий визначник Δ_1, який розкладемо по цьому рядку:

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = ka_{11}A_{11} + ka_{12}A_{12} + \dots + ka_{1n}A_{1n} =$$

$$= k(a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}) = k\Delta .$$

4. Якщо у визначнику переставити два рядки (стовпці), визначник поміняє знак.

Нехай маємо визначник Δ. Переставимо в ньому рядки i та $i+1$ і отримаємо визначник Δ_1. Розкладемо визначник Δ по рядку i, а визначник Δ_1 по рядку $i+1$. Отримані суми відрізняються тільки знаками алгебраїчних доповнень, бо в першому випадку це буде $(-1)^{i+j}$, а в другому – $(-1)^{i+1+j}$. Тому $\Delta_1 = -\Delta$.

Якщо у визначнику переставити i-й та $i+k$-й рядки, то це відповідає тому, що i-й рядок переставили послідовно k раз униз, а $i+k$-й рядок – $k-1$ раз уверх. Всього перестановок відбувається $2k-1$ – непарне число, отже все одно $\Delta_1 = -\Delta$.

Для стовпців доведення також вірне.

5. Визначник, що містить два однакові рядки (стовпці), дорівнює нулю.

Дійсно, переставимо у визначнику ці рядки (стовпці). З одного боку визначник не зміниться, з іншого – за властивістю 4 змінить знак, отже, $\Delta = -\Delta$. А це можливо тільки, коли $\Delta = 0$.

6. Визначник, що містить два пропорційні рядки (стовпці), дорівнює нулю.

Якщо рядки (стовпці) пропорційні, ми можемо коефіцієнт пропорційності з одного рядка (стовпця) винести перед визначником ***за властивістю 3***. Тоді отримаємо визначник з однаковими рядками. ***І за властивістю 5*** можемо стверджувати, що він дорівнює **0**.

7. Сума добутків довільних чисел $b_1, b_2, \dots, b_n$ на алгебраїчні доповнення будь-якого рядка (стовпця) визначника до-

рівнює визначнику, отриманому з вихідного заміною елементів цього рядка (стовпця) на числа $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, ..., \boldsymbol{b}_n$.

Наприклад, для визначника 3-го порядку добуток чисел $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ на алгебраїчні доповнення 1-го рядка $\boldsymbol{A}_{11}, \boldsymbol{A}_{21}, \boldsymbol{A}_{31}$ можна подати так

$$b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + b_3 A_{31} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

8. Сума добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на алгебраїчні доповнення елементів іншого рядка (стовпця) дорівнює 0. Тобто

$$\sum_{s=1}^{n} a_{is} A_{js} = 0 \text{ при } \boldsymbol{i} \neq \boldsymbol{j}.$$

Розглянемо квадратну матрицю, для простоти нехай це буде матриця 3x3:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Її визначник можна обчислити, розклавши, наприклад, за 2-им рядком:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}.$$

Замінимо в цьому розкладі елементи другого рядка на елементи першого рядка з використанням властивості 7:

$$\Delta = a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Замінивши ці елементи ми все одно, що замінили другий рядок на елементи першого рядка. Тим самим ми отримали визначник з 2-ма однаковими рядками. ***За властивістю 5*** такий визначник дорівнює **0**.

9. Визначник не міняється, якщо до елементів одного з його рядків (стовпців) додаються відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на те ж саме число.

Покажемо справедливість твердження на прикладі визначника 3х3.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}.$$

Додамо до другого рядка перший, помножений на число $\boldsymbol{k}$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + ka_{11} & a_{22} + ka_{12} & a_{23} + ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= (a_{21} + ka_{11})A_{21} + (a_{22} + ka_{12})A_{22} + (a_{23} + ka_{13})A_{23} =$$
$$= \left(a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}\right) + k\left(a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23}\right).$$

Сума у перших дужках – наш вихідний визначник Δ, а у других дужках сума ***за властивістю 7*** дорівнює **0.** Отже, визначник не змінився.

10. Визначник добутку двох квадратних матриць дорівнює добутку визначників множників. $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \Rightarrow |\boldsymbol{C}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$.

Навіть, якщо $AB \neq BA$, то $|A||B| = |B||A|$.

Приклад 1

Не обчислюючи визначника $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$, показати, що він дорівнює нулю.

Розв’язання

Віднімемо із другого рядка першу, одержимо визначник $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$, рівний вихідному. Якщо із третього рядка також відняти першу, то вийде визначник $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \end{vmatrix}$, у якому два рядки пропорційні. Такий визначник дорівнює нулю.

Приклад 2

Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ -1 & 0 & 3 & \ldots & n \\ -1 & -2 & 0 & \ldots & n \\ \multicolumn{5}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ -1 & -2 & -3 & \ldots & 0 \end{vmatrix}$.

Розв’язання

Якщо до кожного рядка визначника, починаючи із другий, додати перший рядок, то вийде визначник, у якому всі елементи, що перебувають нижче головної діагоналі, будуть дорівнювати нулю. А саме, одержимо визначник

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 0 & 2 & 6 & \ldots & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \ldots & 2n \\ - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n \end{vmatrix}$, рівний вихідному.

Аналогічно до попереднього прикладу знайдемо, що він дорівнює добутку елементів головної діагоналі, тобто $n!$. Спосіб, за допомогою якого обчислений даний визначник, називається ***способом приведення до трикутного вигляду***.

1.3 Ранг матриці

Розглянемо прямокутну матрицю (1.1). Якщо в цій матриці виділити довільно k рядків і k стовпців, то елементи, що стоять на перетинанні виділених рядків і стовпців, утворять квадратну матрицю розміром $\boldsymbol{k \times k}$. Визначник цієї матриці називається ***мінором k-го порядку*** матриці $\boldsymbol{A}$. Очевидно, що матриця A має мінори будь-якого порядку від 1 до найменшого із чисел $\boldsymbol{m}$ і $\boldsymbol{n}$. Серед всіх відмінних від нуля мінорів матриці A найдеться принаймні один мінор, порядок якого буде найбільшим.

Означення

Найбільший з порядків відмінних від нуля мінорів даної матриці $\boldsymbol{A}$ називається її **рангом**.

Якщо ранг матриці A дорівнює $\boldsymbol{r}$, то це означає, що в матриці $\boldsymbol{A}$ є відмінний від нуля мінор порядку $\boldsymbol{r}$, а всякий мінор порядку, більшого чим $\boldsymbol{r}$, дорівнює нулю. Ранг матриці $\boldsymbol{A}$ позначається через $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})$, або $\operatorname{rang}(\boldsymbol{A})$.

Ранг матриці знаходять або методом **обвідних** мінорів, або методом елементарних перетворень.

Для обчислення рангу матриці **першим способом** варто переходити від мінорів нижчих порядків до мінорів більш високого порядку. Якщо вже знайдений мінор $\boldsymbol{D}$ k-го порядку матриці $\boldsymbol{A}$, відмінний від нуля, то вимагають обчислення лише мінори $(k+1)$-го порядку, що є обвідними для мінору $\boldsymbol{D}$, тобто такі, які вміщають його як мінор. Якщо всі вони дорівнюють нулю, то ранг матриці дорівнює k.

Приклад 1

Знайти методом обведених мінорів ранг матриці

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Починаємо з мінорів 1-го порядку, тобто з елементів матриці A. Виберемо, наприклад, мінор (елемент) $M_1 = 1$, розміщений у першому рядку й першому стовпці. Обведемо його за допомогою другого рядка й третього стовпця, одержуємо мінор $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$, відмінний від нуля. Переходимо тепер до мінорів 3-го порядку, що обводять M_2. Їх усього два (можна додати другий стовпець або четвертий). Обчислюємо їх:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким чином, всі мінори третього порядку, які обводять M_2, виявилися такими, що дорівнюють нулю. Ранг матриці A дорівнює двом, $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A}) = 2$.

Для обчислення рангу матриці **другим** способом введемо декілька означень:

Елементарними перетвореннями називаються такі перетворення матриці:

1) перестановка двох будь-яких рядків (або стовпців);

2) множення рядка (або стовпця) на відмінне від нуля число;

3) додавання до одного рядка (або стовпця) іншого рядка (або стовпця), помноженого на деяке число.

Дві матриці називаються ***еквівалентними***, якщо одна з них виходить із іншої за допомогою кінцевої множини елементарних перетворень.

Еквівалентні матриці не є, загалом, рівними, але їхні ранги рівні. Якщо матриці $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ еквівалентні, то це записується так: $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$.

Канонічною матрицею називається матриця, у якої на початку головної діагоналі стоять поспіль кілька одиниць (число яких може рівнятися нулю), а всі інші елементи дорівнюють нулю, наприклад $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

За допомогою елементарних перетворень рядків і стовпців будь-яку матрицю можна привести до канонічного вигляду. Ранг канонічної матриці дорівнює числу одиниць на її головній діагоналі.

Приклад 2

Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & -1 & -3 \\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$ і привести її до канонічного виду.

Розв'язання

Із другого рядка віднімемо перший й переставимо ці рядки: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$.

Тепер із другого й третього рядків віднімемо перший, помножений відповідно на 2 і 5: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \end{pmatrix}$; із третього рядка віднімемо другий; одержимо матрицю

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

що еквівалентна матриці A, тому що отримано її за допомогою кінцевої множини елементарних перетворень. Очевидно, що ранг матриці B дорівнює 2, а отже, і $r(A) = 2$. Матрицю B легко привести до канонічного виду. Віднімаючи перший стовпець, помножений на підхідні числа, із всіх наступних стовпців, обернемо у нуль всі елементи першого рядка, крім першого елемента, причому елементи інших рядків не змінюються. Потім, віднімаючи другий стовпець, помножений на підхідні числа, із всіх наступних, обернемо у нуль всі елементи другого рядка, крім другого елемента, і одержимо канонічну матрицю:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.4 Обернена матриця

Розглянемо квадратну матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\,n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n\,1} & a_{n\,2} & \dots & a_{n\,n} \end{pmatrix}.$$

Квадратна матриця $\boldsymbol{A}$ називається *не виродженою*, або *неособливою*, якщо її визначник відмінний від нуля, і *виродженою*, або *особливою*, якщо $\Delta_{\boldsymbol{A}} = \mathbf{0}$.

Квадратна матриця B називається оберненою для квадратної матриці A того ж порядку, якщо їхній добуток $AB = BA = E$, де E – одинична матриця того ж порядку, що й матриці A і B.

Теорема

Для того, щоб матриця $\boldsymbol{A}$ мала обернену, необхідно й достатньо, щоб її визначник був відмінний від нуля.

Матриця, обернена до матриці A, позначається через A^{-1}. Обернена матриця обчислюється за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta_A} A^*,$$

де A^* – ***приєднана матриця.*** Вона дорівнює:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n\,1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n\,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1\,n} & A_{2\,n} & \dots & A_{n\,n} \end{pmatrix}, \qquad (1.10)$$

де $\boldsymbol{A_{ij}}$ $\left(\boldsymbol{i} = \overline{1,\boldsymbol{n}}; \quad \boldsymbol{j} = \overline{1,\boldsymbol{n}}\right)$ – алгебраїчні доповнення елементів $\boldsymbol{a_{ij}}$.

Обчислення оберненої матриці за формулою (1.10) для матриць високого порядку є дуже трудомісткою операцією, тому на практиці буває зручно знаходити обернену матрицю за допомогою методу елементарних перетворень (**ЕП**). Будь-яку неособливу матрицю $\boldsymbol{A}$ шляхом **ЕП** тільки стовпців (або тільки рядків) можна привести до одиничної матриці $\boldsymbol{E}$.

Для матриці $\boldsymbol{A}$ складемо дві розширені матриці вигляду $\left(\boldsymbol{A}\,|\boldsymbol{E}\right)$ та $\left(\dfrac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{E}}\right)$, тобто

$$\begin{pmatrix} a_{11}\dots\dots a_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\dots\dots a_{nn} \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1\dots\dots\dots 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ 0\dots\dots\dots 1 \end{pmatrix} \right.; \qquad (1.11\text{ а})$$

$$\begin{pmatrix} a_{n}\dots\dots a_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\dots\dots a_{nn} \\ \hline 1\dots\dots\dots 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ 0\dots\dots\dots 1 \end{pmatrix}. \qquad (1.11\text{ б})$$

Твердження

1. Елементарні перетворення рядків розширеної матриці (1.11 а), які зводять матрицю $\boldsymbol{A}$ до одиничної $\boldsymbol{E}$, відповідають множенню ***ліворуч*** обох частин матриці (1.11 а) на обернену до матриці $\boldsymbol{A}$, тобто

$$\left(\boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{A}\,\middle|\,\boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{E}\right)=\left(\boldsymbol{E}\,\middle|\,\boldsymbol{A}^{-1}\right).$$

Отже, виконавши названі елементарні перетворення матриці (1.11 а), ми отримаємо праворуч шукану обернену матрицю.

2. Елементарні перетворення стовпців розширеної матриці (1.11 б), які зводять матрицю $\boldsymbol{A}$ до одиничної $\boldsymbol{E}$, відповідають множенню ***праворуч*** обох частин (1.11 б) на $\boldsymbol{A}^{-1}$:

$$\left(\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}^{-1}}{\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{A}^{-1}}\right)=\left(\frac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{A}^{-1}}\right).$$

Відзначимо ще раз, що при відшукуванні ***канонічного*** вигляду матриці з метою знаходження її ***рангу*** можна користуватися перетвореннями ***рядків і стовпців***. Якщо потрібно знайти ***обернену*** матрицю, у процесі перетворень необхідно використати ***тільки рядки*** *або* ***тільки стовпці.***

Приклад 1

Для матриці $A=\begin{pmatrix}2 & -2 & 1\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$ знайти обернену.

Розв'язання

Знаходимо спочатку детермінант матриці А

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & -2 & 1\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & 2 & 2\end{vmatrix}=27\neq 0,$$

виходить, обернена матриця існує й ми її можемо знайти за формулою: $A^{-1}=\dfrac{1}{\Delta_A}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}$,

де $A_{ij}\ \ (i,j=1,2,3)$ – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} вихідної матриці. Маємо:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 4 = 6,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(4 + 2) = -6,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -(-4 - 2) = 6,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(4 + 2) = -6,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -(-4 - 2) = 6,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 4 = 6,$$

звідки $A^{-1} = \dfrac{1}{27}\begin{pmatrix} 6 & 6 & 3 \\ -6 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 6 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$

Приклад 2

Методом елементарних перетворень знайти обернену матрицю для матриці: $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Розв'язання

Приписуємо до вихідної матриці праворуч одиничну матрицю того ж порядку: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$.

За допомогою елементарних перетворень рядків приведемо ліву "половину" до одиничного вигляду, роблячи одночасно точно такі перетворення над правою матрицею. По-перше зробимо так, щоб у першому стовпці з'явився одиничний елемент. Для цього помножимо 1-й рядок на (–2) та додамо його до 2-го рядка

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & -2 & 1 & 0 \\ 7 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Далі зробимо перетворення, що зведуть елементи, вищий та нижчий за одиницю, у першому стовпці до нуля. Для цього помножимо другий рядок на (-2) та додамо його до першого рядка, а потім помножимо другий рядок на (-7) та додамо його до третього рядка Отримаємо еквівалентну матрицю:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -13 & 5 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -40 & 14 & -7 & 1 \end{array}\right).$$

Зробимо так, щоб у другому стовпці нижче одиниці стояли нулі. Для цього 1-й рядок помножимо на (-3) та додамо результат до 3-го рядка

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -13 & 5 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Тепер зробимо так, щоб у третьому стовпці вище за (-1) стояли нулі. Для цього 3-й рядок помножимо спочатку на (6) та додамо результат до 2-го рядка, а потім помножимо 3-й рядок на (-13) та додамо результат до 1-го рядка

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 18 & 11 & -13 \\ 1 & 0 & 0 & -8 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Помножимо 3-й рядок на (-1) та переставимо 2-й рядок з 1-м рядком:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -8 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 18 & 11 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Помножимо 3-й стовпець на (-1):

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -8 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 18 & 11 & -13 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Отримана праворуч від вертикальної лінії квадратна матриця є оберненою до даної матриці A.
Отже,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & -5 & 6 \\ 18 & 11 & -13 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Зауваження

Якщо матриця $\boldsymbol{A}$ квадратна другого порядку, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, визначник якої $\Delta_A \neq 0$, то обернену матрицю A^{-1} можна знайти за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta_A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \tag{1.12}$$

§ 2 СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

2.1 КРИТЕРІЙ СУМІСНОСТІ

Означення 1

Система лінійних рівнянь має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{2.1}$$

Тут $\boldsymbol{a_{ij}}$ і $\boldsymbol{b_i}$ ($i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$) – відомі коефіцієнти, а x_j - невідомі змінні.

Якщо всі $\boldsymbol{b_i} = 0$ $(\boldsymbol{i} = \mathbf{1}, \boldsymbol{m})$, то система називається ***однорідною***. Якщо хоч один $\boldsymbol{b_i} \neq \mathbf{0}$ $(\boldsymbol{i} = \overline{\mathbf{1}, \boldsymbol{m}})$, то система називається ***неоднорідною***.

Використовуючи поняття добутку матриць, можна переписати систему (2.1) у вигляді:

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}, \tag{2.2}$$

де $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ – матриця коефіцієнтів системи (2.1),

яка називається матрицею системи, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $B = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$ – вектори-стовпці, складені відповідно з невідомих x_j і з вільних членів b_i (правої частини рівнянь).

Означення 2

Упорядкована сукупність ***n*** дійсних чисел $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ називається ***розв'язком системи (2.1)***, якщо в результаті підстановки цих чисел замість відповідних змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$ кожне рівняння системи перетвориться у арифметичну тотожність. Інакше кажучи, якщо існує вектор $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$ такий, що $AC \equiv B$.

Система (2.1) називається ***сумісною***, якщо вона має принаймні один розв'язок. Система називається ***несумісною***, якщо вона не має ні єдиного розв'язку.

Матриця

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

яка утворена шляхом приписування праворуч до матриці A стовпця вільних членів, називається ***розширеною матрицею системи***.

Питання про сумісність системи (2.1) вирішується теоремою Кронекера-Капеллі.

Теорема Кронекера-Капеллі

Система лінійних рівнянь сумісна тоді й тільки тоді, коли ранги матриць A і $\overline{A}$ збігаються, тобто $rang(A) = rang(\overline{A}) = r$.

Позначимо множину розв'язків системи через $\boldsymbol{M}$. Для системи (2.1) можуть існувати три варіанти розв'язку:

1) $M = \{\varnothing\}$.

У цьому випадку система ***несумісна***, тобто $rang(A) < rang(\overline{A})$;

2) M складається з одного елемента, тобто ***система має єдиний розв'язок*** $\boldsymbol{M = \{C = (c_1, c_2, ..., c_n)^T\}}$.

У цьому випадку система називається ***визначеною*** і, як слідство з теореми ***Кронекера-Капеллі,*** $rang(A) = rang(\overline{A}) = n$, де $\boldsymbol{n}$ – кількість невідомих системи.

3) M складається більше ніж з одного елемента.

У цьому разі система називається ***невизначеною*** і має $rang(A) = rang(\overline{A}) = r < n$.

У третьому випадку система (2.1) має ***безкінечну множину розв'язків***.

Приклад

Дослідити сумісність системи.

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7; \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1;; \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання

Виписуємо розширену матрицю системи

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -1 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & -6 & 5 & 0 \end{array}\right).$$

Обчислимо ранг основної матриці системи. Очевидно, що, наприклад, мінор другого порядку в лівому верхньому куті $\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$. Його обвідні мінори третього порядку дорівнюють нулю

$$M_3' = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & -6 \end{vmatrix} \cdot (-2) \rightarrow \uparrow = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -6 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & -6 \end{vmatrix} = 0,$$

$$M_3'' = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} \cdot (-2) \rightarrow \uparrow = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Отже, ранг основної матриці системи дорівнює 2, тобто $\boldsymbol{rang(A) = 2}$.

Для обчислення рангу розширеної матриці $\overline{A}$ розглянемо обвідний мінор:

(3)

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 14 & 7 \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -35 \neq 0$$

виходить, ранг розширеної матриці $rang(\overline{A}) = 3$.

Оскільки $\boldsymbol{rang(A) \neq rang(\overline{A})}$, то система несумісна.

2.2 Розв'язання визначених систем

Як було сказано раніше, визначена система – це система, у якої, $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{r}(\overline{\boldsymbol{A}})=\boldsymbol{n}$, де $\boldsymbol{n}$ – кількість невідомих системи

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1; \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2; \\ .... \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+...+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases} \tag{2.3}$$

Системи (2.3) можна розв'язати одним з трьох найбільш відомих способів:

–матричним методом;

–за формулами Крамера;

–методами еквівалентних перетворень (методами виключення невідомих) – ***Гаусса*** і ***Жордана-Гаусса***.

2.2.1 Матричний метод розв'язання систем

Матричний метод є одним із найбільш очевидних методів, який напряму випливає з матричного рівняння (2.2). Якщо система (2.3) визначена, то ранг матриці коефіцієнтів системи $\boldsymbol{A}$ дорівнює $\boldsymbol{n}$ **–** кількості невідомих і кількості рівнянь. Отже, визначник цієї системи $\Delta_{\boldsymbol{A}}\neq 0$. Значить матриця $\boldsymbol{A}$ не вироджена і має обернену до себе $\boldsymbol{A}^{-1}$ таку, що $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$. Помножимо обидві частини (2.2) на $\boldsymbol{A}^{-1}$ зліва:

$$A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B;\quad E\cdot X=A^{-1}\cdot B;$$

Враховуючи, що $E\cdot X=X$, можна записати:

$$X=A^{-1}\cdot B. \tag{2.4}$$

Приклад

Розв'язати систему за допомогою оберненої матриці.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

Розв'язання

Позначимо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix},$$

Тоді дана система рівнянь запишеться матричним рівнянням $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$. Оскільки

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0,$$

то матриця $\boldsymbol{A}$ не вироджена й тому має обернену:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta_A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Для одержання розв'язку використовуємо формулу (2.4). Для нашого прикладу

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix},$$

отже,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1\cdot 6 + 3\cdot 3 - 2\cdot 5 \\ -3\cdot 6 + 1\cdot 3 + 1\cdot 5 \\ 1\cdot 6 - 2\cdot 3 + 3\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2.2.2 Формули Крамера для розв'язання визначених систем

Розглянемо більш докладно множення оберненої матриці A^{-1} на матрицю-стовпець вільних членів B,оскільки перетворення вірні для довільної кількості рівнянь, візьмемо для спрощення $n=3$

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta_A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.\ X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

$$X=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{\Delta_A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta_A}\begin{pmatrix} A_{11}b_1+A_{21}b_2+A_{31}b_3 \\ A_{12}b_1+A_{22}b_2+A_{32}b_3 \\ A_{13}b_1+A_{23}b_2+A_{33}b_3 \end{pmatrix}.$$

Використовуючи 7-***му*** властивість визначників (п. 1.2.2), запишемо:

$$A_{11}b_1+A_{21}b_2+A_{31}b_3=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\Delta_1;$$

$$A_{12}b_1+A_{22}b_2+A_{32}b=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}=\Delta_2;$$

$$A_{13}b_1+A_{23}b_2+A_{33}b_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}=\Delta_3. \qquad (2.5)$$

Отже, отримали

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{\Delta_A}\begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \Delta_1/\Delta_A \\ \Delta_2/\Delta_A \\ \Delta_3/\Delta_A \end{pmatrix}.$$

З останньої формули випливає, що

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta_A}; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_A}; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta_A}. \qquad (2.5^*)$$

Отримані формули (2.5) та (2.5*) називають ***Формулами Крамера*** для розв'язання визначених систем лінійних рівнянь.

Приклад

Розв'язати систему рівнянь за формулами Крамера

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = -2, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 = -2, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання

Головний визначник цієї системи

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \end{vmatrix} = -142 \neq 0,$$

отже, система має єдиний розв'язок. Обчислимо допоміжні визначники Δ_i $\left(\boldsymbol{i} = \overline{\mathbf{1,4}}\right)$, що отримуються із визначника $\Delta_{\boldsymbol{A}}$ шляхом заміни в ньому ***i-го*** стовпця стовпцем вільних членів $\boldsymbol{b} = (\mathbf{5;-2;-2;0})^{\boldsymbol{T}}$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 4 \\ -2 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 11 \end{vmatrix} = -142, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & -5 \\ 3 & 0 & 2 & 11 \end{vmatrix} = -284,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & -2 & -5 \\ 3 & 1 & 0 & 11 \end{vmatrix} = -426, \qquad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 142.$$

Звідси,

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta_A} = \frac{-142}{-142} = 1, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_A} = \frac{-284}{-142} = 2,$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta_A} = \frac{-426}{-142} = 3, \qquad x_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta_A} = \frac{142}{-142} = -1.$$

Розв’язком системи буде вектор $\boldsymbol{X=(1, 2, 3, -1)^T}$.

2.2.3 Метод Гауса

Історично першим найпоширенішим методом розв’язання систем лінійних рівнянь є метод Гауса (Карл Фрідріх Гаусс (1777 – 1855) – німецький математик, астроном, фізик і геодезист), або метод послідовного виключення невідомих. Суть цього методу полягає в тому, що за допомогою послідовних елементарних перетворень дана система зводиться до трикутної системи, еквівалентної даній. Ця частина методу називається ***прямою прогонкою***. Елементи головної діагоналі основної матриці, отриманої системи дорівнюють $\mathbf{1}$, а елементи, нижчі за головну діагональ – $\mathbf{0}$. З такої системи зручно послідовними кроками, починаючи з нижнього рівняння знайти всі невідомі. Процес послідовного знаходження невідомих у методі Гаусса називається ***зворотною прогонкою.***

При практичному розв’язанні системи лінійних рівнянь методом Гаусса зручніше приводити до трикутного вигляду не саму систему рівнянь, а розширену матрицю цієї системи, виконуючи елементарні перетворення над її рядками, як це робилося при визначенні рангу матриці. Матриці, які отримують у ході перетворень, як правило, з’єднують знаком еквівалентності “ ~“.

Приклад

Розв’язати систему рівнянь методом Гаусса:

$$\begin{cases} x+y-3z=2, \\ 3x-2y+z=-1, \\ 2x+y-2z=0. \end{cases}$$

Розв’язання

Випишемо розширену матрицю даної системи

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

і зробимо елементарні перетворення над її рядками:

а) додамо до другого й третього рядків розширеної матриці перший рядок, помножений відповідно на (-3) і (-2):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 10 & -7 \\ 0 & -1 & -4 & 2 \end{array}\right);$$

б) третій рядок помножимо на (-5) і додамо до нього другий рядок:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 10 & -7 \\ 0 & 0 & -10 & 13 \end{array}\right).$$

У результаті зроблених елементарних перетворень дана система приводиться до трикутного вигляду:

$$\begin{cases} x + y - 3z = 2, \\ \quad -5y+10z=-7, \\ \qquad -10z=13. \end{cases}$$

З останнього рівняння знаходимо $z = -1{,}3$. Підставляючи це значення в друге рівняння, маємо $y = -1{,}2$. Далі з першого рівняння одержимо $x = -0{,}7$.

2.2.4 Метод Жордана-Гаусса

В економічних задачах часто необхідно розв'язувати системи з дуже великою кількістю змінних. У цьому випадку метод Гаусса не дуже зручний, бо крім зведення розширеної матриці до трикутного вигляду треба також виконати значну кількість обчислень зворотної прогонки.

Більш економічним у плані розрахунків є метод Жордана-Гаусса. Цей метод також належить до методів елементарних перетворень, але розширена матриця вихідної системи зводиться до такої, де основна матриця системи набуває одиничного вигляду, а праві частини такої системи, які записані через риску у розширеній матриці, і є розв'язками системи.

Для невеликих систем еквівалентні перетворення виконуються досить вільно. Так, наприклад, має сенс отримати одиничний елемент a_{11} за допомогою будь - яких вірних елементарних перетворень: переставлянням рядків, відніманням від одного рядка іншого і т.ін.

Для загального використання методу існує строгий алгоритм, він застосовується для кожного рядка розширеної матриці системи.

За один крок один з елементів поточного рядка перетворюється на одиницю, а всі інші елементи із стовпця, в якому стоїть цей елемент перетворюють на нулі. Обраний елемент називається ***розв'язувальним***. ***Розв'язувальними*** також називаються рядок і стовпець, на перетині яких стоїть розв'язувальний елемент. У цьому випадку матриця системи подається у вигляді таблиць.

Алгоритм одного кроку перетворень Жордана-Гаусса

1) Обираємо розв'язувальний елемент $a_{ij} \neq 0$. Він стоїть на перетині ***i-го*** рядка і ***j-го*** стовпця;

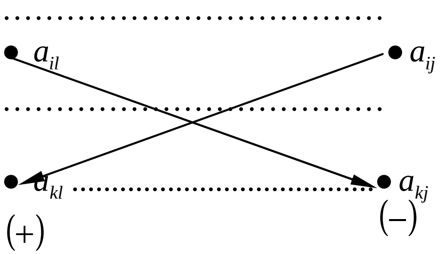
2) Елементи $\boldsymbol{i}$ ***-го*** рядка (розв’язувального) ділимо на $\boldsymbol{a_{ij}}$ і записуємо в $\boldsymbol{i}$ ***-й*** рядок нової розрахункової таблиці;

3) Елементи $\boldsymbol{j}$ ***-го*** стовпця, крім $\boldsymbol{a_{ij}}$, замінимо на $\mathbf{0}$ і записуємо в нову розрахункову таблицю на місце $\boldsymbol{j}$ ***-го*** стовпця;

4) Всі інші елементи нової таблиці обчислюємо за правилом прямокутника:

$$a_{kl}^{*} = \frac{a_{kl}a_{ij} - a_{kj}a_{il}}{a_{ij}} = a_{kl} - a_{kj}\frac{a_{il}}{a_{ij}}. \qquad (2.6)$$

Обчислення a_{kl}^{*} за формулою (2.6) можна подати у вигляді схеми:



Тут a_{ij} – розв’язувальний елемент, а a_{kl} – будь - який елемент розширеної матриці поточної системи, який не належить до розв’язувальних рядка або стовпця і, який необхідно перетворити у елемент нової еквівалентної системи на даному кроці.

5) Зробимо перевірку розрахунків шляхом порівняння суми елементів рядка з елементами контрольного стовпця, який складається із сум елементів відповідних рядків.

Кроки алгоритму треба виконувати до тих пір, поки всі елементи основної матриці системи (крім діагональних $\boldsymbol{a_{ii}}$) не будуть замінені $\mathbf{0}$**,** а діагональні $\boldsymbol{a_{ii}} = \mathbf{1}$.

Приклад

Зробити один крок перетворень Жордана-Гаусса для системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -12 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 13 \\ -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -8. \end{cases}$$

Розв'язання

Складемо таблицю 1 з коефіцієнтів системи і її вільних членів. Елементи останнього – контрольного стовпця повинні дорівнювати сумі елементів відповідного рядка таблиці:

Таблиця 1

x_1	x_2	x_3	b_i	k
4	-5	2	-12	-11
3	2●	-2●	13●	16●
-2	3●	4●	-8●	-3●

За алгоритмом кроку перетворень зробимо перехід до таблиці 2.

1) Обираємо розв'язувальний елемент $\boldsymbol{a_{11} = 4}$;

2) Елементи першого рядка таблиці ділимо на a_{11}; запишемо результат у таблицю 2;

3) Всі елементи розв'язувального стовпця таблиці 2, крім $a_{11} = 1$, замінюємо на 0;

4) Решту елементів обчислимо за формулою 2.6

$$a_{22}^* = a_{22} - a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}} = 2 - 3 \cdot \frac{-5}{4} = \frac{23}{4},$$

$$a_{23}^* = a_{23} - a_{21}\frac{a_{13}}{a_{11}} = -2 - 3 \cdot \frac{2}{4} = -\frac{7}{2},$$

$$b_2^* = b_2 - a_{21}\frac{b_1}{a_{11}} = 13 - 3 \cdot \left(\frac{-12}{4}\right) = 22,$$

$$k_2 = k_2 - a_{21}\frac{k_1}{a_{11}} = 16 - 3 \cdot \frac{-11}{4} = \frac{97}{4},$$

$$a_{32}^{*} = a_{32} - a_{31}\frac{a_{12}}{a_{11}} = 3 + 2\cdot\frac{-5}{4} = \frac{1}{2},$$

$$a_{33}^{*} = a_{33} - a_{31}\frac{a_{13}}{a_{11}} = 4 + 2\cdot\frac{1}{2} = 5,$$

$$b_{3}^{*} = b_{3} - a_{31}\frac{b_{1}}{a_{11}} = -8 + 2\cdot\left(\frac{-12}{4}\right) = -14,$$

$$k_{3} = k_{3} - a_{31}\frac{k_{1}}{a_{11}} = -3 + 2\cdot\frac{-11}{4} = \frac{-17}{2};$$

5 а) Перевіримо правильність обчислення, знаходячи суму перших 3-х елементів 2-го рядка, і, порівнюючи цю суму з 4-м елементом цього ж рядка.

$$\frac{23}{4} - \frac{14}{4} + \frac{88}{4} = \frac{97}{4};$$

5 б) Перевіримо правильність обчислення, знаходячи суму перших 3-х елементів 3-го рядка, і, порівнюючи цю суму з 4-м елементом цього ж рядка

$$\frac{1}{2} + \frac{10}{2} - \frac{28}{2} = \frac{-17}{4}.$$

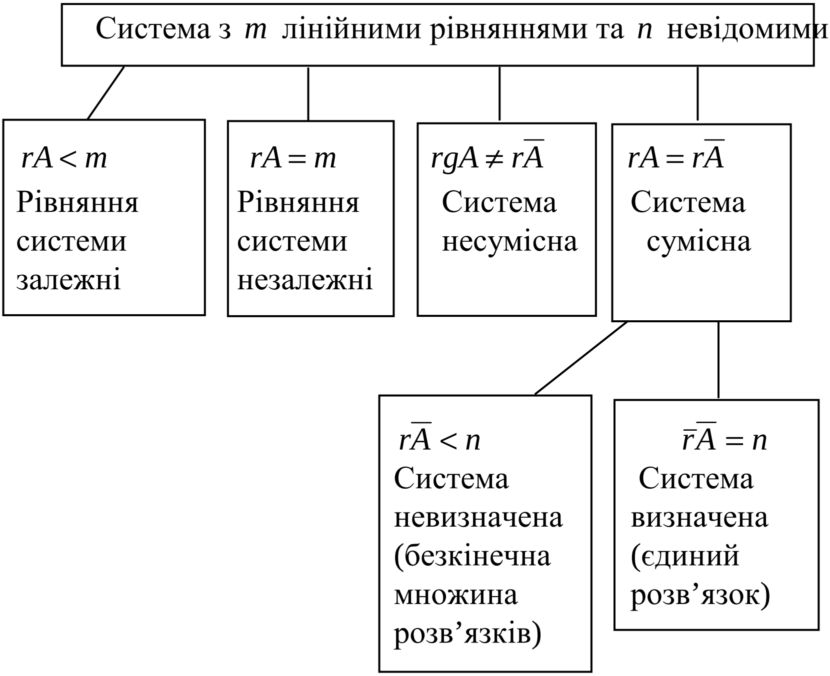
Впевнилися, що елементи таблиці 2 обчислені вірно.

Таблиця 2

x_1	x_2	x_3	b_i	k
1	-5/4	1/2	-3	-11/4
0	23/4	-7/2	22	97/4
0	1/2	5	-14	-17/2

2.3 Невизначені системи лінійних рівнянь

Складемо схему усіх типів систем лінійних рівнянь:



Якщо система (2.1) виявилася сумісною, тобто матриці A і $\overline{A}$ мають однаковий ранг r, але $r < n$, то в даній системі число рівнянь менше за число невідомих.

У цьому разі можна вибрати r невідомих, у яких коефіцієнти системи створюють матрицю з ненульовим визначником – базисним мінором. Наприклад, це можуть бути r перших невідомих $x_1, x_2, .., x_r$. Такі невідомі називаються головними або базисними. Останні $n - r$ невідомих називаються неголовними, або вільними. Саме за цих невідомих система і носить назву невизначеної. Якщо ми задамо будь - яке значення вільним невідомим, то тим самим визначимо систему і можемо отримати конкретні значення базисних невідомих. Очевидно, що розв'язок системи залежить від визначення вільних змінних.

Загальний вигляд розв'язку невизначеної системи можна отримати методами еквівалентних перетворень – методом Гауса і методом Жордана-Гаусса. Методу Жордана-Гаусса надається перевага для розв'язання невизначених систем, бо цей метод одразу визначає ранг системи і базисні невідомі. Такими будуть невідомі, коефіцієнти яких після елементарних перетворень вишикуються у одиничну матрицю.

Розглянемо на прикладі розв'язання невизначених систем:

Приклад

Розв'язати систему методом Жордана-Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -6, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1. \end{cases}$$

Побудуємо першу таблицю Жордано-Гаусівських перетворень, переставивши на перше місце 2-е рівняння для зручності (розв'язувальний елемент вже 1).

Таблиця 1

x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	k
1	2	-2	3	-6	-2
2	-1	1	-1	5	6
3	1	-1	2	-1	4

(-2); (-3)

Таблиця 2

x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	K
1	2	-2	3	-6	-2
0	-5	5	-7	17	10
0	-5	5	-7	17	10

(-1)

Таблиця 3

x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	K
1	2	-2	3	-6	-2
0	-5	5	-7	17	10
0	0	0	0	0	0

Визначили, що 3-тє рівняння можна було отримати, комбінуючи перше та друге рівняння, отже, це *система з залежними рівняннями*. Її ранг $\boldsymbol{r = 2 < n = 4}$, отже, система невизначена і має безкінечну кількість розв'язків. Система має дві базисні (основні) змінні і дві вільні змінні. Визначимо базисні змінні. Візьмемо за базисні x_1 та x_2.

Запишемо четверту таблицю:

Таблиця 4

x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	K
1	2	-2	3	-6	-2
0	-5	5	-7	17	10

Виберемо за розв'язувальний елемент $a_{22} = -5$.

Розділимо на нього 2-й рядок.

Таблиця 5

x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	K
1	2	-2	3	-6	-2
0	1	-1	7/5	-17/5	-2

(-2)

Таблиця 6

x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	K
1	0	0	1/5	4/5	2
0	1	-1	7/5	-17/5	-2

Отримали систему

$$\begin{cases} x_1 + \qquad\qquad (1/5)x_4 = 4/5 \\ \qquad x_2 - x_3 + (7/5)x_4 = -17/5. \end{cases}$$

Ця система має 2 базисні невідомі x_1 та x_2 і дві вільні – x_3 та x_4. Причому

$x_1 = 4/5 - (1/5)x_4; \qquad x_2 = -17/5 + x_3 - (7/5)x_4$.

Отже, видно, що значення базисних невідомих залежить від вільних. Надамо вільним невідомим будь - якого значення, наприклад,

1) $x_3 = 0$ і $x_4 = 0$.

Тоді $x_1 = 4/5$, а $x_2 = -17/5$. Стовпець розв'язків буде:

$X_1^T = (4/5; -17/5; 0; 0)^T$.

Означення

Розв'язок системи (2.1), у якому всі вільні змінні дорівнюють 0 називається **базисним для неоднорідної невизначеної системи.**

2) $x_3 = 0$ і $x_4 = 1$.

Тоді $x_1 = 4/5 - 1/5 = 3/5$, а $x_2 = -17/5 - 7/5 = -24/5$.

$X_2^T = (3/5; -24/5; 0; 1)^T$.

3) $x_3 = 1$ і $x_4 = 0$.

Тоді $x_1 = 4/5$, а $x_2 = -17/5 + 1 = -12/5$.

$X_3^T = (4/5; -12/5; 1; 0)^T$.

Твердження

Сумісна система $\boldsymbol{m}$ лінійних рівнянь з $\boldsymbol{n}$ невідомими ($\boldsymbol{m < n}$) має безкінечну множину розв'язків, серед яких ***базисних розв'язків*** кінцеве число, яке не перевищує $\boldsymbol{C_n^r}$, де $C_n^r = \dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}$ – кількість сполучень з $\boldsymbol{n}$ елементів по $\boldsymbol{r}$.

У наведеному прикладі невизначеної системи ми вибрали за базисні змінні невідомі $\boldsymbol{x_1}$ та $\boldsymbol{x_2}$. Але це не єдиний варіант вибору базисних змінних. Можна було б вибрати за базисні змінні

$\boldsymbol{x_1}$ та $\boldsymbol{x_3}$, або $\boldsymbol{x_1}$ та $\boldsymbol{x_4}$, або $\boldsymbol{x_2}$ та $\boldsymbol{x_3}$, або $\boldsymbol{x_2}$ та $\boldsymbol{x_4}$, або $\boldsymbol{x_3}$ та $\boldsymbol{x_4}$.

Отже, для 4-х невідомих при 2-х базисних змінних ми можемо побудувати 6 базисних розв'язків.

Зазначимо, що $C_4^2 = \dfrac{4 \cdot 3}{2!} = 6$.

У загальному випадку для системи з $\boldsymbol{r}$ першими базисними змінними і $\boldsymbol{n-r}$ останніми вільними змінними загальний розв'язок можна записати так:

$$\begin{cases} c_1 = b_1 - \left(a_{1(r+1)}x_{r+1} + a_{1(r+2)}x_{r+2} + \ldots + a_{1n}x_n\right) \\ c_2 = b_2 - \left(a_{2(r+1)}x_{r+1} + a_{2(r+2)}x_{r+2} + \ldots + a_{2n}x_n\right) \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ c_r = b_r - \left(a_r x_{r+1} + a_{r(r+2)}x_{r+2} + \ldots + a_{rn}x_n\right). \end{cases} \tag{*}$$

Базисний розв'язок запишеться як стовпець

$X^T = \left(c_1, c_2, \ldots, c_r, 0, 0, \ldots 0\right)$,

де $c_1 = b_1$, $c_2 = b_2, \ldots, c_r = b_r$, а всі вільні невідомі у кількості $\boldsymbol{n-r}$ дорівнюють $\mathbf{0}$.

Множину розв'язків системи, в якій вільні змінні у сукупності створюють одиничну матрицю можна записати так:

$$\begin{cases} X^T{}_1 = \left(c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{1r}, 1, 0, 0, \ldots, 0\right)^T \\ X^T{}_2 = \left(c_{21}, c_{22}, \ldots, c_{2r}, 0, 1, 0, \ldots, 0\right)^T \\ X^T{}_3 = \left(c_{31}, c_{32}, \ldots, c_{3r}, 0, 0, 1, \ldots, 0\right)^T \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ X^T{}_{(n-r)} = \left(c_{(n-r)1}, c_{(n-r)2}, \ldots, c_{(n-r)r}, 0, 0, 0, \ldots, 1\right)^T \end{cases}$$

це $n-r$ розв'язків - стовпців.

Всі інші розв'язки системи, яка має $\mathbf{n}$ невідомих і ранг $\mathbf{r < n}$, можна отримати, беручи лінійну комбінацію цих $\mathbf{n-r}$ розв'язків.

2.4 ОДНОРІДНІ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ

Система (2.1) називається однорідною, якщо всі $bi = 0$, тобто вона має вигляд

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0, \\ .... \quad .... \quad ..... \quad .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m1}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{2.7}$$

З теореми Кронекера-Капеллі випливає, що така система завжди сумісна, тому що додавання стовпця з нулів не може підвищити рангу матриці. Виходячи із рівності вільних членів нулю, можна зробити висновок, що принаймні один розв'язок у системи завжди існує: $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$. Такий розв'язок називається ***нульовим*** або ***тривіальним***.

Нехай матриця $\boldsymbol{A}$ системи (2.7) має ранг r.

Якщо $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{n}$, то система має єдиний розв'язок (слідство з теореми Кронекера-Капеллі) і цим розв'язком буде тривіальний розв'язок $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$;

Якщо $\boldsymbol{r} < \boldsymbol{n}$ система має розв'язки, відмінні від нульового, і для їхнього знаходження застосовують той самий алгоритм, як і у випадку довільної невизначеної системи рівнянь.

Позначимо розв'язок системи (2.7) через стовпець $\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{T}} = (\boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_2}, ..., \boldsymbol{c_n})^{\boldsymbol{T}}$.

Розв'язки однорідної системи мають такі властивості:

1. Якщо стовпець $\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{T}} = (\boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_2}, ..., \boldsymbol{c_n})^{\boldsymbol{T}}$ є розв'язком системи (2.7), то і стовпець $\boldsymbol{ke}^{\boldsymbol{T}} = (\boldsymbol{kc_1}, \boldsymbol{kc_2}, ..., \boldsymbol{kc_n})^{\boldsymbol{T}}$ теж є розв'язком цієї системи.

2. Якщо стовпці $\boldsymbol{e}_1^{\boldsymbol{T}} = (\boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_2}, ..., \boldsymbol{c_n})^{\boldsymbol{T}}$ та $\boldsymbol{e}_2^{\boldsymbol{T}} = (\boldsymbol{l_1}, \boldsymbol{l_2}, ..., \boldsymbol{l_n})^{\boldsymbol{T}}$ є розв'язками системи (2.7), то $\boldsymbol{k_1e_1^T} + \boldsymbol{k_2e_2^T} = (\boldsymbol{k_1c_1} + \boldsymbol{k_2l_1}, \boldsymbol{k_1c_2} + \boldsymbol{k_2l_2}, ..., \boldsymbol{k_1c_n} + \boldsymbol{k_2l_n})^{\boldsymbol{T}}$ теж є розв'язком цієї системи.

Запис $\boldsymbol{k_1 e_1^T + k_2 e_2^T}$ називається ***лінійною комбінацією стовпців*** $\boldsymbol{e_1}$ ***та*** $\boldsymbol{e_2}$**.**

Висновок

Із наведених властивостей випливає, що ***всяка лінійна комбінація розв'язків однорідної системи також є розв'язком цієї системи***.

Означення

Множина розв'язків $e_1, e_2, ..., e_n$ системи (2.7), які не можна виразити один через інший, називається ***фундаментальною,*** якщо ***кожний*** з інших розв'язків даної системи є ***лінійною комбінацією розв'язків*** $\boldsymbol{e_1, e_2, ..., e_n}$.

Фундаментальна множина розв'язків має ще одну назву – фундаментальна система розв'язків (ФСР) однорідної системи лінійних рівнянь.

Теорема

Якщо ранг $\boldsymbol{r}$ матриці коефіцієнтів однорідної системи (2.7) менший за число змінних $\boldsymbol{n}$, то будь - яка фундаментальна система розв'язків цієї системи складається з $\boldsymbol{n - r}$ розв'язків.

Тому ***загальний розв'язок*** системи лінійних однорідних рівнянь (2.7) має вигляд:

$$k_1 e_1 + k_2 e_2 + ... + k_{n-r} e_{n-r}, \tag{2.8}$$

де $e_1, e_2, ..., e_{n-r}$ – ,будь - яка ФСР системи, $k_1, k_2, ..., k_{n-r}$ – довільні числа.

Можна показати, що ***загальний розв'язок будь - якої невизначеної системи (2.1) дорівнює сумі загального розв'язка відповідної однорідної системи (2.8), і будь - якого частинного розв'язка вихідної системи (наприклад, базисного розв'язка, коли вільні змінні дорівнюють 0).***

2.5 Застосування загальної теорії СЛАР в економіці

Наведемо приклад, який ілюструє застосування загальної теорії СЛАР до розв'язання економічних задач виробництва.

Приклад

Підприємство виготовляє 5 видів продукції A_1, A_2, A_3, A_4 та A_5. На кожний з видів продукції підприємство витрачає 3 види сировини B_1, B_2, B_3. Витрати ресурсів на одиницю кожного виду продукції відомі. Крім того, відомі граничні запаси кожного з трьох ресурсів. Всі вихідні дані занесені в таблицю 1:

Таблиця 1

Вироби	Норми витрат кожного з ресурсів на 1 продукції (од.)					Запаси ресурсів
Ресурси	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
B_1	$a_{11}=2$	$a_{12}=4$	$a_{13}=2$	$a_{14}=8$	$a_{15}=6$	560
B_2	$a_{21}=7$	$a_{22}=3$	$a_{23}=0$	$a_{24}=2$	$a_{25}=5$	290
B_3	$a_{31}=6$	$a_{32}=15$	$a_{33}=9$	$a_{34}=12$	$a_{35}=0$	1170

Задача

Необхідно сформувати план для випуску продукції підприємством за умови, що ресурси не повинні залишатися невикористаними і, в той самий час, їх повинно вистачити на весь план виробництва.

Розв'язання

Побудуємо математичну модель задачі:

позначимо за x_1 (од.) кількість продукції виду A_1, яку необхідно виробити підприємству для виконання своєї задачі; за x_2 (од.) – кількість продукції виду A_2; за x_3 (од.) – кількість продукції виду A_3; за x_4 (од.) – кількість продукції виду A_4; за x_5 (од.) – кількість продукції виду A_5.

За таких позначень ресурсу B_1 піде на виготовлення продукції типу A_1 піде $\boldsymbol{a_{11} \cdot x_1}$, типу A_2 - $\boldsymbol{a_{12} \cdot x_2}$, типу A_3 - $\boldsymbol{a_{13} \cdot x_3}$, типу A_4 - $\boldsymbol{a_{14} \cdot x_4}$, типу A_5 - $\boldsymbol{a_{15} \cdot x_5}$. Загалом ресурсу B_1 піде на виготовлення продукції всіх типів

$$\boldsymbol{a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 + a_{14} \cdot x_4 + a_{15} \cdot x_5 = B_1}$$

або

$$\boldsymbol{2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 8x_4 + 6x_5 = 560}.$$

Отже, загальні витрати ресурсу B_1 на всі п’ять видів продукції моделюються лінійним рівнянням відносно п’яти змінних.

Для другого ресурсу B_2 модель витрат буде мати вигляд:

$$\boldsymbol{a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 + a_{24} \cdot x_4 + a_{25} \cdot x_5 = B_2}$$

або

$$\boldsymbol{7x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 290}.$$

Для третього ресурсу B_3:

$$\boldsymbol{a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 + a_{34} \cdot x_4 + a_{35} \cdot x_5 = B_3}$$

або

$$\boldsymbol{6x_1 + 15x_2 + 9x_3 + 12x_4 + 0x_5 = 1170}.$$

Загалом витрати всіх ресурсів моделюються СЛАР з трьох рівнянь з п’ятьма невідомими. Загальний вигляд системи:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 = B_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 = B_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{35}x_5 = B_3 \end{cases},$$

або $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 8x_4 + 6x_5 = 560 \\ 7x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 290 \\ 6x_1 + 15x_2 + 9x_3 + 12x_4 + 0x_5 = 1170. \end{cases}$

Отже, математична задача розшуку плану виробництва продукції, який задовольняв би поставлену задачу, звелася до аналізу із розв'язання СЛАР з трьох рівнянь з п'ятьма невідомими.

Зробимо попередній аналіз системи

Спочатку випишемо матричні складові системи.

Матриця коефіцієнтів системи має загальний вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{pmatrix},$$

або, для вихідних даних

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 8 & 6 \\ 7 & 3 & 0 & 2 & 5 \\ 6 & 15 & 9 & 12 & 0 \end{pmatrix},$$

розширена матриця системи

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & 2 & 8 & 6 & 560 \\ 7 & 3 & 0 & 2 & 5 & 290 \\ 6 & 15 & 9 & 12 & 0 & 1170 \end{array}\right),$$

стовпець невідомих змінних

$$X^T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix}^T.$$

Тепер визначимо ранг матриці коефіцієнтів системи і ранг розширеної матриці. Для цього використаємо метод елементарних перетворень. **Для знаходження рангу системи ми можемо виконувати елементарні перетворення як рядків, так і стовпців.**

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & 2 & 8 & 6 & 560 \\ 7 & 3 & 0 & 2 & 5 & 290 \\ 6 & 15 & 9 & 12 & 0 & 1170 \end{array}\right)\begin{array}{l} :2 \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & 3 & 280 \\ 7 & 3 & 0 & 2 & 5 & 290 \\ 6 & 15 & 9 & 12 & 0 & 1170 \end{array}\right)\begin{array}{l}\times(-7);\times(-6) \\ \\ \\ \end{array}\sim$$

Виконуючи перетворення, звернемо увагу, що множенням першого стовпця послідовно на елементи першого рядка і відніманням його від відповідних стовпців, ми можемо зробити нульовими елементи першого рядка, не змінюючи інших елементів матриці. Оскільки нам з першого рядка суттєво важливий тільки $a_{11}=1$, скористаємося такою можливістю спрощення:

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & -7 & -26 & -15 & -1670 \\ 0 & 3 & 3 & -12 & -18 & -510 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ :3;\ \times 11 \end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -70 & -82 & -3540 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -6 & -170 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ :4 \\ \\ \end{array}\sim$$

в останньому рядку можна всі елементи, крім $a_{22}=1$ замінити на 0 з тих же міркувань, що і у попередньому випадку

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -17{,}5 & -20{,}5 & -885 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Отримали ранг системи: $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \overline{A} = 3$.

Висновок

Система, яка моделює витрати ресурсів на виробництво продукції сумісна, але невизначена (за теоремою Кронекера-Капеллі). Отже, кількість базових змінних цієї системи збігається з рангом системи, тобто $k=3$. Інші змінні будуть вільними. Таких змінних буде $n-k=5-3=2$.

Розв'яжемо систему методом Жорданових перетворень, за базисні змінні взявши x_1, x_2 та x_3. Запишемо розширену матрицю системи і виконаємо еквівалентні перетворення, але тепер, виконуючи їх **тільки для рядків.**

Таблиця 1

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	***bi***	Контр. стовп.
2	4	2	8	6	560	582
7	3	0	2	5	290	307
6	15	9	12	0	1170	1212

Таблиця 2

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	***bi***	Контр. стовп.
1	2	1	4	3	280	291
0	-11	-7	-26	-16	-1670	-1730
0	3	3	-12	-18	-510	-534

Таблиця 3

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	***bi***	Контр. стовп.
1	0	-1	12	15	620	647
0	0	4	-70	-82	-3540	-3688
0	1	1	-4	-6	-170	-178

Таблиця 4

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	***bi***	Контр. стовп.
1	0	0	-5,5	-5,5	-265	-275
0	0	1	-17,5	-20,5	-885	-922
0	1	0	13,5	14,5	715	744

Наведемо протокол дій для отримання таблиць 1 – 4.

1) Для таблиці 1.

За розв'язувальний елемент обираємо $\boldsymbol{a_{11} = 2}$. Відповідно до цього вибору розв'язувальним рядком буде **рядок 1**, розв'язувальним стовпцем – **стовпець 1**. Після цього виконаємо дії, результати яких внесемо в **таблицю 2**:

а) перший рядок ділимо на $\boldsymbol{a_{11}=2}$.

б) у першому стовпці всі елементи (окрім $\boldsymbol{a^*_{11}=1}$) заміняємо на $\mathbf{0}$.

в) всі інші елементи таблиці (враховуючи контрольний стовпець) обчислюємо за формулою прямокутника:

$a^*{}_{kl}=\dfrac{a_{kl}\cdot a_{11}-a_{1l}\cdot a_{k1}}{a_{11}}=a_{kl}-\dfrac{a_{1l}\cdot a_{k1}}{a_{11}};\quad k=2{,}3;\ l=2{,}\ldots 5$ – нові витрати ресурсів;

$b^*{}_{k}=\dfrac{b_{k}\cdot a_{11}-b_{1}\cdot a_{k1}}{a_{11}}=b_{k}-\dfrac{b_{1}\cdot a_{k1}}{a_{11}};\quad k=2{,}3;\ l=2{,}\ldots 5$ – нові запаси ресурсів.

Позначивши через $\boldsymbol{c_i}$, $\boldsymbol{i=1,2,3}$ елементи контрольного стовпця, отримаємо формули обчислення його нових значень:

$$c^*{}_{k}=\frac{c_{k}\cdot a_{11}-c_{1}\cdot a_{k1}}{a_{11}}=c_{k}-\frac{c_{1}\cdot a_{k1}}{a_{11}};\quad k=2{,}3;\ l=2{,}\ldots 5.$$

Наприклад, обчислимо деякі елементи другого рядка:

$$a^*{}_{22}=a_{22}-\frac{a_{12}\cdot a_{21}}{a_{11}}=3-\frac{4\cdot 7}{2}=3-14=-11,$$

$$b^*{}_{2}=b_{2}-\frac{b_{1}\cdot a_{21}}{a_{11}}=290-\frac{560\cdot 7}{2}=290-1960=\text{-}1670,$$

$$c^*{}_{2}=c_{2}-\frac{c_{1}\cdot a_{21}}{a_{11}}=307-\frac{582\cdot 7}{2}=307-2037=\text{-}1730.$$

Правильність обчислення інших елементів рекомендуємо перевірити студентам самостійно;

г) перевіримо в таблиці 2 збіг значень елементів контрольного стовпця з сумою елементів відповідних рядків:

рядок 1: $1+2+1+4+3+280=291 \quad c_1=291$,

рядок 2: $0-11-7-26-16-1670=-1730 \quad c_2=-1730$,

рядок 3: $0+3+3-12-18-510=-534 \quad c_3=-534$.

Суми збіглися, отже, перетворення виконані вірно.

2) Для таблиці 2.

За розв'язувальний елемент обираємо $\boldsymbol{a_{32}} = \mathbf{3}$. Відповідно до цього вибору розв'язувальним рядком буде **рядок 3**, розв'язувальним стовпцем – **стовпець 2**. Після цього виконаємо дії, результати яких внесемо в **таблицю 3**:

а) третій рядок ділимо на $\boldsymbol{a_{32}} = \mathbf{3}$.

б) у другому стовпці всі елементи (окрім $\boldsymbol{a^*_{32}} = \mathbf{1}$) заміняємо на $\mathbf{0}$.

в) всі інші елементи таблиці (враховуючи контрольний стовпець) обчислюємо за формулою прямокутника. Запишемо цю формулу вже перетвореною:

$a^*_{kl} = a_{kl} - \dfrac{a_{3l} \cdot a_{k2}}{a_{32}}; \quad k = 1,2;\ l = 1,3,...5$ - нові витрати ресурсів;

$b^*_{k} = b_{k} - \dfrac{b_{3} \cdot a_{k2}}{a_{32}}; \quad k = 1,2;\ l = 1,3,...5$ - нові запаси ресурсів.

$c^*_{k} = c_{k} - \dfrac{c_{3} \cdot a_{k2}}{a_{32}}; \quad k = 1,2;\ l = 1,3,...5$ - нові значення контрольного стовпця.

Правильність обчислення елементів таблиці 3 рекомендуємо перевірити студентам самостійно.

г) перевіримо в таблиці 3 збіг значень елементів контрольного стовпця з сумою елементів відповідних рядків:

рядок 1: $1 + 0 - 1 + 12 + 15 + 620 = 647 \quad c_1 = 647$,

рядок 2: $0 + 0 + 4 - 70 - 82 - 3540 = -3688 \quad c_2 = -3688$,

рядок 3: $0 + 1 + 1 - 4 - 6 - 170 = -178 \quad c_3 = -178$.

Суми збіглися, отже, перетворення виконані вірно.

3) Для таблиці 3.

За розв'язувальний елемент обираємо $\boldsymbol{a_{23}} = \mathbf{4}$. Відповідно до цього вибору розв'язувальним рядком буде **рядок 2**, розв'язувальним стовпцем – **стовпець 3**. Після цього виконаємо дії, результати яких внесемо в **таблицю 4**:

а) другий рядок ділимо на $\boldsymbol{a_{23}} = \mathbf{4}$.

б) у третьому стовпці всі елементи (окрім $\boldsymbol{a^*_{23}} = \mathbf{1}$) заміняємо на $\mathbf{0}$.

в) всі інші елементи таблиці (враховуючи контрольний стовпець) обчислюємо за формулою прямокутника:

$a^*_{kl} = a_{kl} - \frac{a_{2l} \cdot a_{k3}}{a_{23}}; \quad k = 1,3; \; l = 1,2,4,5$ - нові витрати ресурсів;

$b^*_{k} = b_{k} - \frac{b_{2} \cdot a_{k3}}{a_{23}}; \quad k = 1,3; \; l = 1,2,4,5$ - нові запаси ресурсів.

$c^*_{k} = c_{k} - \frac{c_{2} \cdot a_{k3}}{a_{23}}; \quad k = 1,3; \; l = 1,2,4,5$ - нові значення контрольного стовпця.

Правильність обчислення елементів таблиці 4 залишаємо студентам на самостійну перевірку.

г) перевіримо в таблиці 4 збіг значень елементів контрольного стовпця з сумою елементів відповідних рядків:

рядок 1: $1 + 0 + 0 - 5{,}5 - 5{,}5 - 265 = -275 \qquad c_1 = -275$,

рядок 2: $0 + 0 + 1 - 17{,}5 - 20{,}5 - 885 = -922 \qquad c_2 = -922$,

рядок 3: $0 + 1 + 0 + 13{,}5 + 14{,}5 + 715 = 744 \qquad c_3 = 744$.

Суми збіглися, отже, перетворення виконані вірно.

Вихідна невизначена СЛАР зведена до еквівалентної системи, з якої легко знайти її загальний розв'язок. Розглянемо таблицю Жорданових перетворень:

Таблиця 5

$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$	$\boldsymbol{x_4}$	$\boldsymbol{x_5}$	***bi***	Контр. стовп.
1	0	0	-5,5	-5,5	-265	-275
0	0	1	-17,5	-20,5	-885	-922
0	1	0	13,5	14,5	715	744

Згідно цієї таблиці розв'язок системи має таку структуру:

Базисними змінними є змінні $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_3}$, вільними – $\boldsymbol{x_4}, \boldsymbol{x_5}$. Базисні змінні через вільні виражаються таким чином:

$$\begin{aligned} x_1 &= 5{,}5x_4 + 5{,}5x_5 - 265 \\ x_2 &= 17{,}5x_4 + 20{,}5x_5 - 885 \\ x_3 &= -13{,}5x_4 - 14{,}5x_5 + 715. \end{aligned} \tag{*}$$

Отже, ми можемо, надаючи вільним змінним певних значень, побудувати **фундаментальну систему розв'язків (ФСР)** відповідної однорідної системи, взяти будь - який **частинний розв'язок** даної неоднорідної системи і побудувати для цієї системи **загальний розв'язок, як сума частинного розв'язку і ФСР**.

Знайдемо ФСР.

Однорідна система, яка відповідає вихідній неоднорідній має розв'язок:

$$\begin{aligned} x_1 &= 5{,}5x_4 + 5{,}5x_5 \\ x_2 &= 17{,}5x_4 + 20{,}5x_5 \\ x_3 &= -13{,}5x_4 - 14{,}5x_5. \end{aligned}$$

Надамо вільним змінним значень і визначимо вектори розв'язків однорідної системи:

а) $x_4 = 1;\ x_5 = 0:\ x_1 = 5{,}5;\ x_2 = 17{,}5;\ x_3 = -13{,}5$, отже, перший вектор ФСР буде

$$X_1^T = (5{,}5; 17{,}5 - 13{,}5; 1; 0)^T.$$

б) $x_4 = 0;\ x_5 = 1:\ x_1 = 5{,}5;\ x_2 = 20{,}5;\ x_3 = -14{,}5$, отже, другий вектор ФСР буде

$$X_2^T = (5{,}5; 20{,}5 - 14{,}5; 0; 1)^T.$$

Як відомо з загальної теорії СЛАР, ФСР є лінійною комбінацією двох отриманих розв'язків, тобто ФСР є:

$$F = \alpha X_1 + \beta X_2 = \alpha \begin{pmatrix} 5{,}5 \\ 17{,}5 \\ -13{,}5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 5{,}5 \\ 20{,}5 \\ -14{,}5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

де α і β - довільні дійсні числа.

в) за частинний розв'язок вихідної неоднорідної системи можна взяти будь - який розв'язок, отриманий з системи (*), надавши вільним змінним довільні значення. Наприклад, можна було б взяти базисний розв'язок:

$$x_4 = 0;\ x_5 = 0:\ \ x_1 = -265;\ x_2 = -885;\ x_3 = 715,$$

отже, частинний розв'язок неоднорідної системи буде

$$X_{ч.н.} = (-265; -885; 715; 0; 0).$$

Отже загальний розв'язок вихідної системи буде мати вигляд:

$$X_{з.н.} = X_{ч.н.} + FSR =$$

$$= X_{ч.н.} + \alpha X_1 + \beta X_2 = \begin{pmatrix} -265 \\ -885 \\ 715 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 5{,}5 \\ 17{,}5 \\ -13{,}5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 5{,}5 \\ 20{,}5 \\ -14{,}5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

де α і β - довільні дійсні числа.

Підсумок розв'язання і аналіз результатів

Була поставлена задача формування плану випуску продукції підприємством за умови, що ресурси не повинні залишатися невикористаними і, в той же час, їх повинно вистачити на весь план виробництва.

Математичною моделлю цієї задачі стала СЛАР

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 8x_4 + 6x_5 = 560, \\ 7x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 290, \\ 6x_1 + 15x_2 + 9x_3 + 12x_4 + 0x_5 = 1170. \end{cases}$$

Ця система згідно з теоремою Кронекера-Капеллі є невизначеною і має нескінчену множину розв'язків. Це відповідає існуванню множині планів випуску продукції, які відповідають поставленим вимогам.

Загальний розв'язок системи має вигляд

$$X_{з.н.} = \begin{pmatrix} -265 \\ -885 \\ 715 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 5{,}5 \\ 17{,}5 \\ -13{,}5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 5{,}5 \\ 20{,}5 \\ -14{,}5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

де α і β - довільні дійсні числа.

Отже, розв'язок має 2 вільні змінні $\boldsymbol{x_4}, \boldsymbol{x_5}$ і 3 базисні – $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_3}$.

Надаючи вільним змінним будь - якого значення, ми можемо отримати один з частинних розв'язків системи.

Але економічний зміст задачі входить у протиріччя з розв'язком системи, якщо не задовольнити ще одну умову: всі змінні в задачі невід'ємні, тобто $x_i \geq 0;\ i = \overline{1{,}5}$. Дійсно, не можна випустити (-265) одиниць продукції. Отже, даний загальний розв'язок СЛАР буде розв'язком поставленої економічної задачі, якщо він буде розглядатися у системі з умовою на невід'ємність змінних, тобто:

$$\begin{cases} X_{з.н.} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -265 \\ -885 \\ 715 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 5{,}5 \\ 17{,}5 \\ -13{,}5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 5{,}5 \\ 20{,}5 \\ -14{,}5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1{,}5} \end{cases}$$

Прикладом плану, що задовольняє виробництво може служити план:

$\alpha = 30, \quad \beta = 20$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -265 \\ -885 \\ 715 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 30 \begin{pmatrix} 5,5 \\ 17,5 \\ -13,5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 20 \begin{pmatrix} 5,5 \\ 20,5 \\ -14,5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -265+165+165 \\ -885+525+410 \\ 715-405-290 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 50 \\ 20 \\ 30 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Відповідь на вихідну задачу

Отже, виготовляючи продукцію за умови достатності і повного використання ресурсів, підприємство може, наприклад випустити:

10 одиниць продукції A_1,

50 одиниць продукції A_2,

по 20 одиниць продукції A_3 і A_5,

30 одиниць продукції A_4.

Рекомендація

Студентам для кращого розуміння економічного змісту отриманого результату рекомендується довільним варіюванням величин α і β знайти ряд розв’язків системи і дати висновок – є ці розв’язки системи допустимими розв’язками економічної задачі чи ні.

§ 3 ЕЛЕМЕНТИ МАТРИЧНОГО АНАЛІЗУ

3.1 N- ВИМІРНИЙ ВЕКТОР ТА ВЕКТОРНИЙ ПРОСТІР

Означення 1

Впорядковану сукупність $(x_1, x_2, ..., x_n)$ n дійсних чисел називають n - **вимірним вектором**, а числа x_i $\left(i = \overline{1, n}\right)$ - компонентами, або **координатами** вектора.

Поняття n- вимірного вектора широко застосовується в економічних моделях.

Якщо, наприклад, деякий автомобільний завод має випустити в зміну 50 легкових автомобілів, 100 вантажних, 10 автобусів, 50 комплектів запчастин для легкових автомобілів і 150 комплектів для вантажних автомобілів і автобусів, то змінну виробничу програму цього заводу можна записати у вигляді вектора, що має п'ять компонентів: (50, 100, 10, 50, 150).

Вектори позначають або жирними малими літерами, або буквами з рискою (стрілкою) нагорі, або великими літерами, як позначають і матриці. Наприклад, $\boldsymbol{a}$, або $\bar{a}$, або A .

Означення 2

Два вектори називаються **рівними**, якщо вони мають однакове число компонентів і їхні відповідні компоненти рівні. Тобто, якщо дані два вектори

$$X = (x_1, x_2, ..., x_n) \text{ та } Y = (y_1, y_2, ..., y_n),$$

то

$$X = Y : x_1 = y_1,\ x_2 = y_2, ..., x_n = y_n .$$

Компоненти вектора не можна міняти місцями, наприклад, $(3,2,5,0,1) \neq (2,3,5,0,1)$.

Означення 3

Добутком вектора $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ на дійсне число λ називається вектор

$\lambda X = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$.

Сумою векторів $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ і $Y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ називається вектор

$X + Y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$.

Лінійні операції над будь - якими векторами задовольняють таким властивостям:

1. $X + Y = Y + X$ – комутативна властивість додавання векторів.

2. $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$ – асоціативна властивість додавання векторів.

3. $\alpha(\beta X) = (\alpha\beta)x$ - асоціативна властивість відносно числового множника.

4. $\alpha(X + Y) = \alpha X + \alpha Y$ – дистрибутивна властивість відносно додавання векторів.

5. $(\alpha + \beta)X = \alpha X + \beta X$ – дистрибутивна властивість відносно додавання числових множників.

6. Існує нейтральний елемент відносно додавання векторів: нульовий вектор $\mathbf{0} = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, ..., \mathbf{0})$: $X + \mathbf{0} = X$ для будь - якого X.

7. Для будь - якого вектора X існує протилежний вектор $(-X)$, такий, що

$X + (-X) = \mathbf{0}$.

8. Існує нейтральний елемент відносно операції множення вектора на число:

$\mathbf{1} \cdot X = X$ для будь - якого вектора X.

Означення 4

Множина векторів з дійсними компонентами, в якій визначені операції додавання векторів та множення вектора на число з наведеними вище властивостями (розглядаються, як аксіоми) називається **лінійним векторним простором.**

Економічна ілюстрація n-вимірного векторного простору.

Простір благ (товарів).

Під **товаром** ми будемо розуміти деяке благо або послугу, що надійшли у продаж о певній годині в певному місці. Припустимо, що існує скінчена кількість наявних товарів – $\boldsymbol{n}$. Для кожного споживача можна скласти набір товарів, які він придбав:

$$\boldsymbol{X} = \left(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_n\right),$$

де числом $\boldsymbol{x}_i$ позначається кількість придбаного $\boldsymbol{i}$***-го*** блага $\left(\boldsymbol{i} = \mathbf{1}, ..., \boldsymbol{n}\right)$. Будемо вважати, що всі товари мають властивість довільної подільності, тобто може бути куплена будь-яка невід'ємна кількість кожного з них. Тоді всі можливі набори товарів є векторами простору товарів.

$$\boldsymbol{C} = \left\{\boldsymbol{x} = \left(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_n\right) \middle| \; \boldsymbol{x}_i \geq \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{i} = \overline{\mathbf{1}, \boldsymbol{n}}\right\}.$$

3.2 Вимір і базис лінійного векторного простору

Означення 1

Вектор $\boldsymbol{A}_m$ називається **лінійною комбінацією** векторів $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, ..., \boldsymbol{A}_{m-1}$ векторного простору, якщо він дорівнює сумі доданків цих векторів на довільні дійсні числа $\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2, ..., \boldsymbol{k}_{m-1}$:

$$\boldsymbol{A}_m = \boldsymbol{k}_1 \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{k}_2 \boldsymbol{A}_2 + ... + \boldsymbol{k}_{m-1} \boldsymbol{A}_{m-1} \tag{3.1}$$

Означення 2

Опуклою лінійною комбінацією векторів $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, ..., \boldsymbol{A}_{m-1}$ векторного простору називається вектор $\boldsymbol{A}_m$ (3.1), якщо для довільних дійсних чисел $\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2, ..., \boldsymbol{k}_{m-1}$ виконуються умови:

$$\begin{cases} \boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2 + ... + \boldsymbol{k}_{m-1} = \mathbf{1}; \\ \boldsymbol{k}_i \geq \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{i} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, ..., \boldsymbol{m} - \mathbf{1}. \end{cases}$$

Наприклад. Лінійна комбінація $\frac{1}{5}A_1 + \frac{2}{15}A_2 + \frac{2}{3}A_3$ є опуклою, бо для її коефіцієнтів виконуються умови:

$$k_1 = \frac{1}{5} \ge 0,\ k_2 = \frac{2}{15} \ge 0,\ k_3 = \frac{2}{3} \ge 0,$$

$$k_1 + k_2 + k_3 = \frac{1}{5} + \frac{2}{15} + \frac{2}{3} = 1.$$

Означення 3

Система $\boldsymbol{A_1, A_2, ..., A_m}$ $\boldsymbol{n}$- вимірних векторів називається **лінійно незалежною**, якщо рівність

$$\boldsymbol{k_1 A_1 + k_2 A_2 + ... + k_m A_m = 0} \qquad (3.2)$$

виконується тільки за умови, що $\boldsymbol{k_1 = k_2 = ... = k_m = 0}$ ($\boldsymbol{k_i}$ – дійсні числа); якщо ж хоча б одне число $\boldsymbol{k_i \ne 0}$ $\boldsymbol{(i = \overline{1, n})}$, то дана система векторів називається ***лінійно залежною***.

Можна показати, що коли вектори $\boldsymbol{A_1, A_2, ..., A_m}$ лінійно залежні , то хоча б один з цих векторів можна виразити через інші, і навпаки, якщо хоча б один вектор із системи векторів $\boldsymbol{A_1, A_2, ..., A_m}$ можна виразити через інші, то ця система лінійно залежна.

Геометричний зміст лінійної залежності векторів у звичному нам просторі, що інтерпретуються, як спрямовані відрізки, пояснюють такі теореми:

Теорема 1

Система, що складається з **одного** вектора, лінійно залежна тоді й тільки тоді, коли цей вектор **нульовий**.

Теорема 2

Для того, щоб **два** вектори були лінійно залежні, необхідно й достатньо, щоб вони були **колінеарні**.

Теорема 3

Для того, щоб **три** вектори були лінійно залежні, необхідно й достатньо, щоб вони були **компланарні** (лежали в одній площині).

Наведемо деякі властивості векторів лінійного простору:

1. Якщо серед векторів $\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{A_2}, ..., \boldsymbol{A_m}$ є нульовий вектор, то вони лінійно залежні. Дійсно, якщо, наприклад, $\boldsymbol{A_1} = \mathbf{0}$, то рівність (3.2) виконується за умов $\boldsymbol{k_1} = \mathbf{1}, \boldsymbol{k_2} = ... = \boldsymbol{k_m} = \mathbf{0}$.

2. Якщо частина векторів системи $\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{A_2}, ..., \boldsymbol{A_m}$ лінійно залежна, то і вся система лінійно залежна. Дійсно, якщо підсистема векторів $\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{A_2}, ..., \boldsymbol{A_l}$, $\boldsymbol{l} < \boldsymbol{m}$ лінійно залежна, то деякі дійсні числа в рівності $\boldsymbol{k_1 A_1} + \boldsymbol{k_2 A_2} + ... + \boldsymbol{k_l A_l} = \mathbf{0}$ не дорівнюють $\mathbf{0}$. Отже, взявши ці числа до всієї системи, ми отримаємо, що (3.2) виконується, коли не всі $\boldsymbol{k_i} = \mathbf{0}$. Тобто система $\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{A_2}, ..., \boldsymbol{A_m}$ лінійно залежна.

Приклад 1

Дослідити лінійну незалежність векторів $A_1^T = (1,3,1,3)^T$, $A_2^T = (2,1,1,2)^T$, $A_3^T = (3,-1,1,1)^T$.

Розв'язання

Складемо рівність (3.8): $\boldsymbol{k_1 A_1} + \boldsymbol{k_2 A_2} + \boldsymbol{k_3 A_3} = \mathbf{0}$.

Підставимо в рівність координати векторів:

$$k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Виконаємо всі дії з векторами і отримаємо **однорідну** систему рівнянь:

$$\begin{cases} k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 0 \\ 3k_1 + k_2 - k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 + k_3 = 0 \\ 3k_1 + 2k_2 + k_3 = 0. \end{cases}$$

Якщо система визначена, тобто ранг матриці її коефіцієнтів дорівнює $\mathbf{3}$, система має єдиний розв'язок – тривіальний:

$\boldsymbol{k_1 = k_2 = k_3 = 0}$ і, отже, дана система векторів лінійно незалежна. Знайдемо ранг матриці її коефіцієнтів методом Жордана Гауса

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} (-1);\ (-3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} (-1);(-3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

З останньої еквівалентної матриці видно, що ранг матриці коефіцієнтів дорівнює 2, оскільки два рядки стали нульовими, а на головній діагоналі є тільки 2 одиниці. Отже, ранг матриці менший за 3, система невизначена і має ненульові розв'язки, $k_i \quad \left(i = \overline{1,3}\right)$ необов'язково 0. Це означає, що система векторів лінійно залежна.

Означення 4

Лінійний простір називають $\boldsymbol{n}$**- вимірним,** якщо в ньому існує система з $\boldsymbol{n}$ лінійно незалежних векторів, а будь - яка система з $\boldsymbol{n+1}$ вектора вже є лінійно залежною.
Або:

Вимір простору складає максимальна система лінійно незалежних векторів, що входить у цей простір.

Число $\boldsymbol{n}$ називається **виміром простору**.

Означення 5

Сукупність $\boldsymbol{n}$ лінійно незалежних векторів $\boldsymbol{n}$- вимірного простору називається його **базисом.**

Теорема 4

Кожний вектор $\boldsymbol{X}$ лінійного простору можна подати ***єдиним способом як лінійну комбінацію базисних векторів.***

Доведення

Нехай система векторів $\boldsymbol{E_1}, \boldsymbol{E_2},..., \boldsymbol{E_n}$ створює базис лінійного $\boldsymbol{n}$- вимірного простору. Отже, будь - яка система з $\boldsymbol{n+1}$ вектора буде лінійно залежною. Зокрема, система векторів $\boldsymbol{E_1}, \boldsymbol{E_2},..., \boldsymbol{E_n}, \boldsymbol{X}$ буде лінійно залежною, і для неї рівність $\boldsymbol{k_1E_1 + k_2E_2 + ... + k_nE_n + kX = 0}$ виконується для $\boldsymbol{k \neq 0}$. Отже, вектор $\boldsymbol{X}$ можна подати через систему базисних векторів так:

$$X = -\frac{k_1}{k}E_1 - \frac{k_2}{k}E_2 - ... - \frac{k_n}{k}E_n,$$

або

$$\boldsymbol{X = x_1E_1 + x_2E_2 + ... + x_nE_n}. \tag{3.3}$$

Таке подання вектора $\boldsymbol{X}$ через базисні вектори єдине, бо якби існувало ще одне подання

$$\boldsymbol{X = y_1E_1 + y_2E_2 + ... + y_nE_n}$$

то в силу властивості існування протилежного елемента

$$\boldsymbol{X - X = 0 = \left(x_1 - y_1, x_2 - y_2, ..., x_n - y_n\right)},$$

а отже, всі $\boldsymbol{x_i - y_i = 0}$, або $\boldsymbol{x_i = y_i \left(i = \overline{1,n}\right)}$.

Це доводить, що подання вектора через базис **єдине**.

Рівність (3.3) називається **розкладанням вектора $\boldsymbol{X}$ за базисом $\boldsymbol{E_1}, \boldsymbol{E_2},..., \boldsymbol{E_n}$**, а числа $\boldsymbol{x_1, x_2, ..., x_n}$ – координатами вектора $\boldsymbol{X}$ у даному базисі.

Теорема 5

Якщо $\boldsymbol{E_1}, \boldsymbol{E_2},..., \boldsymbol{E_n}$ – система лінійно незалежних векторів лінійного простору і будь - який вектор $\boldsymbol{A}$ цього простору лінійно подається через названу систему векторів, то цей простір є $\boldsymbol{n}$- вимірним, а вектори $\boldsymbol{E_1}, \boldsymbol{E_2},..., \boldsymbol{E_n}$ – його **базисом**.

Приклад 2

Довести, що вектори $A_1=(1,1,0)$, $A_2=(1,-1,1)$, $A_3=(-3,5,-6)$ створюють базис лінійного тривимірного простору і знайти координати вектора $A=(2,2.2)$ у цьому базисі.

Розв'язання

Згідно з теоремою 5, якщо вектор $\boldsymbol{A}$ лінійно подається через систему векторів, то ця система складає базис відповідного простору. Запишемо подання вектора $\boldsymbol{A}$ через систему векторів $\boldsymbol{A_1},\boldsymbol{A_2},\boldsymbol{A_3} : \boldsymbol{a_1A_1}+\boldsymbol{a_2A_2}+\boldsymbol{a_3A_3}$, де $\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{a_3}$ – координати вектора $\boldsymbol{A}$ в системі $\boldsymbol{A_1},\boldsymbol{A_2},\boldsymbol{A_3}$. Підставимо в розкладання координати:

$$A=a_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+a_3\begin{pmatrix}-3\\5\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$$

після виконання всіх операцій отримаємо систему:

$$\begin{cases}a_1+a_2-3a_3=2\\ a_1-a_2+5a_3=2\\ \quad +a_2-6a_3=2.\end{cases}$$

Розв'яжемо її методом Жордана - Гауса

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-3&2\\1&-1&5&2\\0&1&-6&2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-3&2\\0&-2&8&0\\0&1&-6&2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-3&2\\1&1&-6&2\\0&-2&8&0\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&3&0\\0&1&-6&2\\0&0&-4&4\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&3\\0&1&0&-4\\0&0&1&-1\end{array}\right).$$

Отримали розв'язок системи: $a_1=3$; $a_2=-4$; $a_3=-1$.

Отже, вектор $\boldsymbol{A}$ в системі векторів $\boldsymbol{A_1},\boldsymbol{A_2},\boldsymbol{A_3}$ має лінійне подання

$\boldsymbol{A} = 3\boldsymbol{A}_1 - 4\boldsymbol{A}_2 - \boldsymbol{A}_3$.

За теоремою 5 система векторів $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3$ створює базис тривимірного простору і координати вектора $\boldsymbol{A}$ в цьому базисі є $\boldsymbol{a}_1 = \mathbf{3},\ \boldsymbol{a}_2 = \mathbf{-4},\ \boldsymbol{a}_3 = \mathbf{-1}$.

3.3 Евклідів простір

Вище ми визначили лінійний векторний простір, операції, які дозволяються в ньому: множення вектора на число, додавання векторів, а також властивості цих операцій. Ввели поняття розмірності і базису. Введемо спосіб вимірювання довжини векторів і кутів. Закон, за яким відбувається вимірювання довжин векторів, називається **метрикою**.

Для визначення метрики введемо поняття **скалярного добутку векторів.**

Означення 1

Скалярним добутком двох векторів $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_n)$ та $\boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, ..., \boldsymbol{y}_n)$ називається ***число***

$$(X, Y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n = \sum_1^n x_i y_i \ . \qquad (3.4)$$

Скалярний добуток векторів має певний економічний зміст: якщо вектор $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_n)$ є вектор об'ємів різних товарів, а вектор $\boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, ..., \boldsymbol{y}_n)$ – вектор їх цін, то скалярний добуток $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ є загальною вартістю цих товарів.

Скалярний добуток має такі властивості (беруться, як аксіоми):

1. $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = (\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X})$ – комутативність;
2. $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} + \boldsymbol{Z}) = (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) + (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Z})$ – дистрибутивність;
3. $(\boldsymbol{k}\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{k}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ – для будь - якого дійсного числа $\boldsymbol{k}$;
4. $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}) > \mathbf{0}$, якщо $\boldsymbol{X} \neq \mathbf{0}$ та $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}) = \mathbf{0}$, якщо $\boldsymbol{X} = \mathbf{0}$.

Означення 2

Лінійний векторний простір, на якому задана операція скалярного добутку векторів, що задовольняє 4-м вищеназваним аксіомам, називається **евклідовим простором.** Позначають такий простір $\boldsymbol{R^n}$, де $\boldsymbol{n}$ – вимір простору.

Довжиною (нормою) вектора $\boldsymbol{X}$ в евклідовому просторі називається величина:

$$|X| = \sqrt{(X, X)}. \tag{3.5}$$

Властивості довжини вектора:

1. $|\boldsymbol{X}| = \boldsymbol{0}$ тоді і тільки тоді, коли $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$;
2. $|\boldsymbol{kX}| = |\boldsymbol{k}| \cdot |\boldsymbol{X}|$, де $\boldsymbol{k}$ – довільне дійсне число;
3. $|\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}| \le |\boldsymbol{X}||\boldsymbol{Y}|$ – нерівність Коші-Буняковського;
4. $|\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y}| \le |\boldsymbol{X}| + |\boldsymbol{Y}|$ – нерівність трикутника.

Кут $\boldsymbol{\varphi}$ між двома векторами $\boldsymbol{X}$ та $\boldsymbol{Y}$ визначається рівністю:

$$\cos(\varphi) = \frac{(X, Y)}{|X||Y|}. \tag{3.6}$$

Означення 3

Два вектори називаються **ортогональними**, якщо їх скалярний добуток дорівнює **0**.

Нульовий вектор ортогональний до будь - якого іншого вектора.

Нормованим вектором називається вектор, який має **одиничну довжину.**

Довільний вектор евклідового простору $\boldsymbol{R^n}$ нормалізується за формулою:

$$\frac{X}{\sqrt{(X, X)}} = \left(\frac{x_1}{\sqrt{(X, X)}} \quad \frac{x_2}{\sqrt{(X, X)}} \quad \cdots \quad \frac{x_n}{\sqrt{(X, X)}} \right).$$

Вектори $\boldsymbol{E_1}, \boldsymbol{E_2},..., \boldsymbol{E_n}$ евклідового простору $\boldsymbol{R^n}$ створюють ортонормований базис, якщо вони попарно ортогональні і норми кожного з них дорівнюють **1**. Тобто, якщо

$$\left(E_i, E_j\right) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}, \tag{3.7}$$

за довільних $\boldsymbol{i = 1,2,...,n}$; $\boldsymbol{j = 1,2,...,n}$.

У тому, що вектори $\boldsymbol{E_1}, \boldsymbol{E_2},..., \boldsymbol{E_n}$ створюють базис, можна впевнитися, розглянувши їх лінійну комбінацію. Якщо вони створюють базис, то вони лінійно незалежні, отже, рівність

$$\boldsymbol{k_1 E_1 + k_2 E_2 + ... + k_n E_n = 0}$$

можлива тільки за умови $\boldsymbol{k_1 = k_2 = ... = k_n}$.

Помножимо скалярно ліву і праву частини рівності на будь який вектор $\boldsymbol{E_i}$. Виходячи з (3.6), можна зробити висновок, що всі доданки, крім $\boldsymbol{k_i\left(E_i E_i\right)}$, будуть дорівнювати $\boldsymbol{0}$. Останній же набуває значення $\boldsymbol{k_i}$. Отже, рівність набуває вигляду $\boldsymbol{k_i = 0}$. Оскільки ми вибрали довільний вектор, то можна стверджувати, що й умова лінійної незалежності виконується.

Теорема

У довільному n – вимірному просторі існує ортонормований базис.

За приклад можна взяти наш трьохвимірний простір з ортонормованим базисом

$$\boldsymbol{I = (1, 0, 0);\ J = (0, 1, 0);\ K = (0, 0, 1)}.$$

3.4 Перехід від базису до базису

Нехай в просторі $\boldsymbol{R^n}$ існують 2 базиси: старий $\boldsymbol{E_1}, \boldsymbol{E_2},..., \boldsymbol{E_n}$ і новий $\boldsymbol{E_1^*}, \boldsymbol{E_2^*},..., \boldsymbol{E_n^*}$ (кожний з $\boldsymbol{E_i}$ та $\boldsymbol{E_i^*}$ – вектори). Кожний вектор нового базису можна подати лінійною комбінацією векторів старого базису:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{E}_1^* = \boldsymbol{c}_{11}\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{c}_{12}\boldsymbol{E}_2 + \ldots + \boldsymbol{c}_{1n}\boldsymbol{E}_n \\
&\boldsymbol{E}_2^* = \boldsymbol{c}_{21}\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{c}_{22}\boldsymbol{E}_2 + \ldots + \boldsymbol{c}_{2n}\boldsymbol{E}_n \\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
&\boldsymbol{E}_n^* = \boldsymbol{c}_{n1}\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{c}_{n2}\boldsymbol{E}_2 + \ldots + \boldsymbol{c}_{nn}\boldsymbol{E}_n .
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Або, якщо сукупність векторів старого базису подати як рядок $\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \ldots, \boldsymbol{E}_n)$, а сукупність векторів нового базису – як рядок $\boldsymbol{E}^* = (\boldsymbol{E}_1^*, \boldsymbol{E}_2^*, \ldots, \boldsymbol{E}_n^*)$, то можна записати, що

$$\boldsymbol{E}^* = \boldsymbol{EC}\,, \tag{3.9}$$

де $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \ldots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \ldots & c_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{1n} & c_{2n} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix}$ – ***матриця переходу*** від ***старого базису*** до ***нового***.

Стовпцями цієї матриці є ***координати векторів нового базису у старому.***

Матриця $\boldsymbol{C}$ переходу від одного базису до іншого в лінійному просторі **завжди невироджена** (тобто $\boldsymbol{\Delta C \neq 0}$).

Обернений перехід від нового базису до старого здійснюється за допомогою оберненої матриці $\boldsymbol{C}^{-1}$:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}^*\boldsymbol{C}^{-1} . \tag{3.10}$$

Знайдемо залежність між координатами вектора в різних базисах. Нехай довільний вектор $\boldsymbol{X}$ має координати $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$ в базисі $\boldsymbol{E}$, а в базисі $\boldsymbol{E}^*$ координати $(\boldsymbol{x}_1^*, \boldsymbol{x}_2^*, \ldots, \boldsymbol{x}_n^*)$. Тоді

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}_1^*\boldsymbol{E}_1^* + \boldsymbol{x}_2\boldsymbol{E}_2^* + \ldots + \boldsymbol{x}_n^*\boldsymbol{E}_n^* = \boldsymbol{x}_1\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{x}_2\boldsymbol{E}_2 + \ldots + \boldsymbol{x}_n\boldsymbol{E}_n .$$

Підставимо замість векторів базису $\boldsymbol{E}^*$ їх подання (3.8) через старий базис $\boldsymbol{E}$. Після перетворень одержимо:

$$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{c}_{11}\boldsymbol{x}_1^* + \boldsymbol{c}_{21}\boldsymbol{x}_2^* + \ldots + \boldsymbol{c}_{n1}\boldsymbol{x}_n^* ,$$

$$x_2 = c_{12}x_1^* + c_{22}x_2^* + \ldots + c_{n2}x_n^*,$$

$$\ldots \quad \ldots. \quad \ldots. \quad \ldots. \quad \ldots. \quad \ldots. \quad \ldots.,$$

$$x_n = c_{1n}x_1^* + c_{2n}x_2^* + \ldots + c_{nn}x_n^*,$$

або в матричній формі:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{pmatrix}, \quad \textit{або} \quad \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \qquad (3.11)$$

Приклад

За умовою другого прикладу поточного розділу система векторів $C_1 = (1,1,0)$, $C_2 = (1,-1,1)$, $C_3 = (-3,5,-6)$ створює базис простору R^3. Вектор $B = (4,-4,5)$ заданий в ортонормованому базисі E_1, E_2, E_3. Знайти координати вектора B в базисі $C = (C_1, C_2, C_3)$.

Розв'язання

Запишемо зв'язок між базисами:

$$C_1 = E_1 + E_2,$$

$$C_2 = E_1 - E_2 + E_3,$$

$$C_3 = -3E_1 + 5E_2 - 6E_3.$$

Матриця переходу від базису E до базису C має вигляд (складається з координатних стовпців векторів базису C):

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}.$$

Щоб обчислити координати вектора $B = (4;-4;5)$ в новому базисі, використаємо формулу (3.10): $X^* = C^{-1}X$. За відомим правилом обчислимо C^{-1}, отримаємо:

$$C^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 6 & -6 & -8 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix},$$

тепер за формулою (3.10) маємо:

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 6 & -6 & -8 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 2 \\ -0.5 \end{pmatrix}.$$

Отже, нові координати вектора $\boldsymbol{B}$ у базисі $\boldsymbol{C}$ є $b_1 = 0{,}5;\ b_2 = 2;\ b_3 = -0{,}5$. Вектор $\boldsymbol{B}$ в базисі $\boldsymbol{C}$ може буди поданий $\boldsymbol{B = 0{,}5C_1 + 2C_2 - 0{,}5C_3}$.

3.5 Матриці лінійного відображення і перетворення

У попередньому розділі ми познайомилися з тим, як квадратна матриця служить для перетворення координат векторів з одного базису у інший. Узагальнюючи цю інформацію, можна впевнитися в тому, що за допомогою квадратної матриці у векторному лінійному просторі можна робити будь які лінійні перетворення з векторами цього простору, тобто змінювати довжину вектора і повертати його на потрібний кут. Якщо ж виникає потреба побудувати взаємно однозначну відповідність векторів лінійних просторів різних вимірів, то в цьому разі використовують прямокутну матрицю.

Розглянемо два простори різних вимірів – $\boldsymbol{R^n}$ виміру $\boldsymbol{n}$ та $\boldsymbol{R^m}$ виміру $\boldsymbol{m},\ \boldsymbol{n \neq m}$.

Означення 1

Якщо задано правило, згідно якого кожному вектору $\boldsymbol{X}$ простору $\boldsymbol{R^n}$ ставиться у відповідність вектор $\boldsymbol{Y}$ простору $\boldsymbol{R^m}$, то кажуть, що задано **відображення векторів** простору $\boldsymbol{R^n}$ у простір $\boldsymbol{R^m}$. Відображення задається за допомогою **матриці відображення** з $\boldsymbol{R^n}$ в $\boldsymbol{R^m}$. Якщо простори $\boldsymbol{R^n}$ та $\boldsymbol{R^m}$ евклідові (задані операції додавання, множення на число та скалярний добуток, які відповідають вищенаведеним аксіомам), то матриця відображення називається **матрицею лінійного відображення. Матриця лінійного відображення з $\boldsymbol{R}^n$ в $\boldsymbol{R}^m$ має розмір $\boldsymbol{m \times n}$.**

Означення 2

Якщо ж задано правило, згідно якого кожному вектору $\boldsymbol{X}$ простору $\boldsymbol{R}^n$ ставиться у відповідність вектор $\boldsymbol{Y}$ того ж простору, то кажуть, що задана **матриця перетворення** векторів простору $\boldsymbol{R}^n$. **Матриця лінійного перетворення** з $\boldsymbol{R}^n$ в $\boldsymbol{R}^n$ **- квадратна.**

Зауваження

Ці означення вірні у будь - якому лінійному просторі, не обов'язково евклідовому.

Зв'язок між векторами $\boldsymbol{Y} \in \boldsymbol{R}^m$ **та** $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{R}^n$ можна виразити матричним рівнянням:

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X}\ . \tag{3.12}$$

При цьому вектор $\boldsymbol{Y}$ називають образом вектора $\boldsymbol{X}$, а вектор $\boldsymbol{X}$ – прообразом вектора $\boldsymbol{Y}$.

Приклад

Нехай правило відповідності векторів лінійного простору $\boldsymbol{R}^3$ та лінійного простору $\boldsymbol{R}^2$ задано матрицею $\boldsymbol{A}$ лінійного відображення з $\boldsymbol{R}^3$ в $\boldsymbol{R}^2$. У просторі $\boldsymbol{R}^3$ заданий вектор $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{1; -2; 3})$, або в ортонормованому базисі $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{E}_1 - 2\boldsymbol{E}_2 + 3\boldsymbol{E}_3$. Знайти його образ у просторі $\boldsymbol{R}^2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Розв'язання

Використаємо формулу (3.12):

$$Y = AX = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2+0 \\ 3-4-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix},$$

або в ортонормованому базисі $\boldsymbol{Y = 3E_1 - 7E_2}$.

Поставимо задачу:

Як зміниться матриця лінійного відображення векторів, якщо вектори розглядати в різних базисах?

Розглянемо два лінійних векторних простори $\boldsymbol{R^n}$ та $\boldsymbol{R^m}$ $\boldsymbol{n \neq m}$. Нехай існує закон за яким вектори $\boldsymbol{X \in R^n}$ ставляться у взаємно однозначну відповідність векторам $\boldsymbol{Y \in R^m}$. Матрицею, яка відповідає цьому закону буде матриця $\boldsymbol{A}$ розмірності $\boldsymbol{m \times n}$. Причому, згідно (3.12) $\boldsymbol{Y = AX}$.

З попереднього матеріалу відомо, що кожний лінійний простір має не один базис.

Нехай у просторі $\boldsymbol{R^n}$ існує старий базис $\boldsymbol{E = (E_1, E_2, ..., E_n)}$, в якому заданий вектор $\boldsymbol{X}$ і новий базис $\boldsymbol{E^* = (E_1^*, E_2^*, ..., E_n^*)}$, в якому нам необхідно працювати. Матрицею переходу від старого базису до нового є матриця $\boldsymbol{C}$. Причому, згідно з (3.11)

$$\boldsymbol{X = CX^*}. \tag{3.13}$$

Нехай у просторі $\boldsymbol{R^m}$ існує старий базис $\boldsymbol{I = (I_1, I_2, I_m)}$, в якому заданий вектор $\boldsymbol{Y}$ і новий базис $\boldsymbol{I^* = (I_1^*, I_2^*, ..., I_m^*)}$, в якому нам необхідно працювати. Матрицею переходу від старого базису до нового є матриця $\boldsymbol{T}$. Причому, згідно з (3.9)

$$\boldsymbol{Y = TY^*}. \tag{3.14}$$

Підставимо (3.13) і (3.14) у (3.12). Отримаємо:

$$\boldsymbol{TY^* = ACX^*}.$$

Щоб отримати $\boldsymbol{Y^*}$, необхідно обидві частини рівняння помножити на $\boldsymbol{T^{-1}}$ **зліва** (зауважимо, що матриця $\boldsymbol{T}$ є невиродженою, оскільки це є матриця переходу від базису до базису простору $\boldsymbol{R^m}$). Отримаємо:

$$Y^* = T^{-1}ACX^* . \quad (3.15)$$

Оскільки формула (3.12) виконується в довільному базисі, то можна зробити висновок, що матриця лінійного відображення векторів у нових базисах

$$E^* = \left(E_1^*, E_2^*, ..., E_n^*\right) \in R_n$$

та

$$I^* = \left(I_1^*, I_2^*, ..., I_m^*\right) \in R^m$$

має вигляд

$$A^* = T^{-1}AC . \quad (3.16)$$

Якщо матриця лінійного перетворення ставить у відповідність вектори одного і того ж простору R^n із старим базисом $E = \left(E_1, E_2, ..., E_n\right)$ і новим $E^* = \left(E_1^*, E_2^*, ..., E_n^*\right)$, то

$$A^* = C^{-1}AC . \quad (3.17)$$

3.6 Власні значення та власні вектори матриці перетворення

Серед матриць лінійних перетворень векторів особливий клас створюють матриці, за допомогою яких вектор лінійного простору змінює тільки свій розмір. Таку зміну вектора можна записати в матричному вигляді так:

$$AX = kX , \quad (3.18)$$

де $k \in R$.

Або через рівняння:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = kx_1 ,$$

$$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = kx_2 ,$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad ... \quad ...$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = kx_n . \quad (3.19)$$

Означення 1

Якщо матриця $\boldsymbol{A}$ виконує перетворення (3.18) над вектором $\boldsymbol{X}$, то число $\boldsymbol{k}$ на яке змінює свій розмір даний вектор під впливом цієї матриці називається **власним числом матриці $\boldsymbol{A}$**, яке відповідає вектору $\boldsymbol{X}$. Відповідний вектор $\boldsymbol{X}$ називається **власним вектором** матриці перетворень $\boldsymbol{A}$. Кожному власному числу відповідає єдиний власний вектор.

Як пізніше буде показано, власні числа та власні вектори матриці перетворення мають дуже широке практичне застосування. Тому важливою стає задача обчислення цих чисел для даної матриці перетворень.

Перепишемо (3.18) у вигляді:

$$\boldsymbol{AX - kX = 0},$$

або

$$\left(\boldsymbol{A - kE}\right)\boldsymbol{X = 0}. \tag{3.20}$$

Запишемо через рівняння:

$$\begin{aligned}
&\left(\boldsymbol{a_{11} - k}\right)\boldsymbol{x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0},\\
&\boldsymbol{a_{21}x_1 + \left(a_{22} - k\right)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0},\\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots\\
&\boldsymbol{a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + \left(a_{nn} - k\right)x_n = 0}.
\end{aligned}$$

Отримали однорідну систему рівнянь. Така система, як відомо, завжди має тривіальний розв'язок $\boldsymbol{X = 0}$. Для $\boldsymbol{X \neq 0}$ необхідно, щоб визначник матриці коефіцієнтів цієї системи $\left|\boldsymbol{A - kE}\right| \boldsymbol{= 0}$. Запишемо умову у розгорнутому вигляді:

$$\left|A - kE\right| = \begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0 \tag{3.21}$$

Визначник $\left|\boldsymbol{A - kE}\right|$ є поліномом $\boldsymbol{n}$-ї степені відносно $\boldsymbol{k}$. Цей поліном називається **характеристичним поліномом** матриці перетворень $\boldsymbol{A}$. Рівняння (3.21) **– характеристичним рівнянням** матриці перетворень $\boldsymbol{A}$.

Теорема 1

Характеристичний поліном не залежить від вибору базису.

Доведення

Розглянемо визначник (3.21) у новому базисі $\boldsymbol{E^{*}}: \left|\boldsymbol{A^{*}} - \boldsymbol{kE}\right| = \boldsymbol{0}$. Використовуючи формулу (3.17), можна записати: $\boldsymbol{A^{*}} = \boldsymbol{C^{-1}AC}$. Отже $\left|\boldsymbol{C^{-1}AC} - \boldsymbol{kE}\right| = \boldsymbol{0}$. З операцій над матрицями відомо, що $\boldsymbol{C^{-1}E} = \boldsymbol{C^{-1}}$, а $\boldsymbol{C^{-1}C} = \boldsymbol{E}$, отже, одиничну матрицю $\boldsymbol{E}$ можна подати у вигляді $\boldsymbol{C^{-1}EC}$. Характеристичне рівняння в новому базисі набуває вигляду:

$$\left|\boldsymbol{C^{-1}AC} - \boldsymbol{kC^{-1}EC}\right| = \left|\boldsymbol{C^{-1}}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{kE})\boldsymbol{C}\right| = \boldsymbol{0}.$$

Враховуючи властивість 10 визначників, запишемо:

$$\left|\boldsymbol{C^{-1}}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{kE})\boldsymbol{C}\right| = \left|\boldsymbol{C^{-1}}\right|\left|(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{kE})\right|\left|\boldsymbol{C}\right| = \left|\boldsymbol{C^{-1}}\right|\left|\boldsymbol{C}\right|\left|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{kE}\right| = \left|(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{kE})\right|.$$

Отримали, що характеристичний поліном у новому базисі дорівнює характеристичному поліному в старому базисі, що доводить твердження про те, що **характеристичний поліном не залежить від базису.**

Приклад 1

Знайти власні значення та власні вектори матриці перетворення

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Складемо характеристичне рівняння (3.21):

$$\begin{vmatrix} 1-k & 4 \\ 9 & 1-k \end{vmatrix} = (1-k)^2 - 36 = 1 - 2k + k^2 - 36 = k^2 - 2k - 35 = 0,$$

$$k_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+35} = 1 \pm 6;$$

$k_1 = 1 - 6 = -5$; $\qquad k_2 = 1 + 6 = 7$.

Власні числа матриці перетворення знайдені. Знайдемо відповідні до них власні вектори.

Згадаємо, що вектори ми знаходимо з матричного рівняння $\boldsymbol{(A - kE)X = 0}$. Підставимо в це рівняння по черзі всі власні числа.

Для власного числа $\boldsymbol{k_1 = -5}$ отримаємо систему:

$$\begin{pmatrix} 1+5 & 4 \\ 9 & 1+5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

або

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

звідки $3x_1 = -2x_2$, або, якщо вільну x_1 взяти за сталу C_1, то $x_2 = -1{,}5C_1$. Отже, власним вектором матриці перетворення $\boldsymbol{A}$, який відповідає власному числу $k_1 = -5$, буде вектор $X_1 = \begin{pmatrix} C_1 \\ -1{,}5C_1 \end{pmatrix}$.

Для власного числа $\boldsymbol{k_2 = 7}$ отримаємо систему:

$$\begin{pmatrix} 1-7 & 4 \\ 9 & 1-7 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 9 & -6 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

або

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

звідки $3x_1 = 2x_2$, або, якщо вільну x_2 прийняти за сталу C_2, то $x_1 = (2/3)C_2$. Отже, власним вектором матриці перетворення $\boldsymbol{A}$, який відповідає власному числу $k_2 = 7$, буде вектор

$$X_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}C_2 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

C_1, C_2 – довільні сталі з $\boldsymbol{R}$.

Теорема 2

Якщо матриця лінійного перетворення $\boldsymbol{A}$ має $\boldsymbol{n}$ **дійсних** власних значень $\boldsymbol{k_1, k_2, ..., k_n}$, $(\boldsymbol{k_i \in R})$, то відповідні до них власні вектори лінійно незалежні, і створюють базис простору $\boldsymbol{R^n}$. Якщо ж кількість **дійсних** власних значень матриці лінійного перетворення дорівнює $\boldsymbol{m < n}$, то відповідні $\boldsymbol{m}$ власних векторів є теж лінійно незалежними й створюють базис підпростору $\boldsymbol{R^m}$ простору $\boldsymbol{R^n}$.

У просторі, базисом якого є система лінійно незалежних власних векторів, матриця лінійних перетворень має найбільш простий вигляд.

Теорема 3

Нехай $\boldsymbol{E_1, E_2, ..., E_n}$ – лінійно незалежні власні вектори матриці лінійного перетворення $\boldsymbol{A}$, вони відповідають попарно нерівним власним значенням $\boldsymbol{k_1, k_2, ..., k_n}$. Візьмемо систему власних векторів $\boldsymbol{E_1, E_2, ..., E_n}$ за базис. Матриця лінійного перетворення у базисі, складеному з її власних векторів набуває діагонального вигляду:

$$A = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_n \end{pmatrix}, \qquad (3.22)$$

де на головній діагоналі стоять ***власні числа матриці лінійного перетворення.***

Правильно і навпаки: якщо матриця лінійного перетворення $\boldsymbol{A}$ в деякому базисі набуває діагонального вигляду, то цей базис складається з **власних векторів** цієї матриці, а її діагональні елементи – її **власні числа**.

Матриця $\boldsymbol{A}$, розміром $n \times n$, яка має $\boldsymbol{n}$ дійсних власних чисел і відповідно до них $\boldsymbol{n}$ власних векторів називається такою, що діагоналізується.

Приклад 2

Привести матрицю лінійних перетворень $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$ до діагонального вигляду.

Розв'язання

У попередньому прикладі ми отримали власні числа і власні вектори для даної матриці лінійного перетворення. Власні числа $k_1 = -5$ і $k_2 = 7$, а власні вектори $X^{(1)} = \begin{pmatrix} c_1 \\ -1{,}5c_1 \end{pmatrix}$; $X^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}c_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$;

c_1, c_2 – довільні сталі. Надамо сталим значення, щоб отримати власні вектори, з яких складемо базис. Нехай $c_1 = 2, c_2 = 3$. Тоді базисні вектори нового базису будуть

$$E_1^* = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}; \quad E_2^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Матриця переходу від старого, ортонормованого базису $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ до нового буде $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$. Використовуючи формулу (3.17) для матриці перетворень у новому базисі, запишемо: $\boldsymbol{A^* = C^{-1}AC}$. За правилом отримання оберненої матриці розміром 2х2 запишемо

$$C^{-1} = \frac{1}{\Delta_C}\begin{pmatrix} c_{22} & -c_{12} \\ -c_{21} & c_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Отже, A^* – матриця лінійного перетворення в базисі з власних векторів буде мати вигляд:

$$A^{*}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}3 & -2\\ 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4\\ 9 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2\\ -3 & 3\end{pmatrix}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}3-18 & 12-2\\ 3+18 & 12+2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2\\ -3 & 3\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}-15 & 10\\ 21 & 14\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2\\ -3 & 3\end{pmatrix}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}-30-30 & -30+30\\ 42-42 & 42+42\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}-60 & 0\\ 0 & 84\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 0\\ 0 & 7\end{pmatrix}.$$

Отримали, що матриця лінійного перетворення в базисі, складеному з власних векторів, дійсно має діагональний вигляд, тобто вона є такою, ***що діагоналізується***. На її діагоналі в базисі з власних векторів стоять власні числа.

Означення 2

Квадратна матриця лінійного перетворення $\boldsymbol{A}$, в якій $\boldsymbol{a_{ij}=a_{ji}, i=1,2,...,n,\quad j=1,2,...,n,\ i\neq j}$ називається **симетричною** матрицею лінійного перетворення. Очевидно, що для такої (і тільки для такої) матриці виконується рівність $\boldsymbol{A^T=A}$.

Наведемо деякі властивості власних чисел і власних векторів симетричної матриці лінійних перетворень.

Властивості власних чисел і власних векторів симетричеської матриці.

1. Всі власні числа симетричної матриці **дійсні.**

2. Власні вектори симетричної матриці, які відповідають різним власним числам, **ортогональні.**

Теорема 4

Якщо власне число $\boldsymbol{k}$ симетричної матриці лінійних перетворень є **простим коренем характеристичного рівняння (3.21),** то ранг відповідної системи рівнянь (3.20) $\boldsymbol{(A-k\cdot E)X=0}$ дорівнює $\boldsymbol{n-1}$.

Якщо ж він має кратність $\boldsymbol{p(p<n)}$, то ранг відповідної системи рівнянь (3.20) дорівнює $\boldsymbol{n-p}$. У цьому випадку власному

числу $\boldsymbol{k}$ відповідають $\boldsymbol{p}$ лінійно незалежних власних векторів. Такими векторами може бути, наприклад, **фундаментальна система розв'язків (ФСР)** системи (3.20).

3.7 Квадратичні форми

Для розв'язання багатьох задач аналітичної геометрії необхідним є такий математичний інструментарій, як квадратичні форми. Зокрема, алгебра квадратичних форм необхідна для визначення типу лінії або поверхні, яка описує той чи інший економічний процес.

Означення

Квадратичною формою $\boldsymbol{L(x_1, x_2, ..., x_n)}$ називають суму, кожний доданок якої є або квадратом однієї з змінних, або додатком двох різних змінних, взятих з дійсним коефіцієнтом.

$$L(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \tag{3.23}$$

Вважаємо, що всі $\boldsymbol{a_{ij}}$ – дійсні числа, до того ж $\boldsymbol{a_{ij} = a_{ji}}$. Матриця $\boldsymbol{A}$, яка складається з коефіцієнтів квадратичної форми, називається **матрицею квадратичної форми**. Матриця квадратичної форми **завжди симетрична:** $\boldsymbol{A^T = A}$, або $\boldsymbol{a_{ij} = a_{ji},\ i = 1, 2, ..., n,\ i \neq j}$.

У матричному запису квадратична форма має вигляд:

$$L = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = X^T A X. \tag{3.24}$$

Приклад

Записати в матричному вигляді квадратичну форму

$$\boldsymbol{L(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 - 12x_1x_2 - 10x_1x_3 + x_2^2 - 3x_3^2}.$$

Розв'язання

Матриця квадратичної форми на головній діагоналі має коефіцієнти квадратів змінних, отже, $\boldsymbol{a_{11} = 4, a_{22} = 1, a_{33} = -3}$. Інші елементи матриці беруться з коефіцієнтів додатків різних змінних у квадратичній формі. Причому, враховуючи те, що $\boldsymbol{x_i x_j = x_j x_i}$, $\boldsymbol{a_{ij} = a_{ji}}$ і дорівнює половині коефіцієнта при відповідному додатку у квадратичній формі, отже, $\boldsymbol{a_{12} = a_{21} = (-12/2) = -6}$; $\boldsymbol{a_{13} = a_{31} = (-10/2) = -5}$; $\boldsymbol{a_{23} = a_{32} = 0}$. Матриця $\boldsymbol{A}$ запишеться так:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -5 \\ -6 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

квадратична форма

$$L(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -6 & -5 \\ -6 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Подивимося як зміниться матриця квадратичної форми, якщо над векторами змінних зробити невироджене лінійне перетворення.

Нехай вектор $\boldsymbol{X}$ та вектор $\boldsymbol{Y}$ одного й того ж простору $\boldsymbol{R^n}$ зв'язані законом, якому відповідає матриця лінійного перетворення $\boldsymbol{C : X = CY}$.

Підставимо цей закон до квадратичної форми (3.23):

$$\underline{\boldsymbol{L(x_1, x_2, ..., x_n)}} = \boldsymbol{(CY)^T ACY = Y^T C^T ACY = Y^T A^* Y =}$$
$$\underline{\boldsymbol{= L(y_1, y_2, ..., y_n)}}.$$

Отже, якщо існує лінійне перетворення $\boldsymbol{X = CY}$, то матриця квадратичної форми за цього перетворення набуває вигляду:

$$\boldsymbol{A^* = C^T AC}. \tag{3.25}$$

3.8 Зведення квадратичних форм до канонічного вигляду

Означення

Квадратична форма $L(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$ називається **канонічною**, якщо всі її коефіцієнти $\boldsymbol{a_{ij} = 0}$ для $\boldsymbol{i \neq j}$.

Отже, канонічна квадратична форма має вигляд:

$$\boldsymbol{L(x_1, x_2, ..., x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + ... + a_{nn}x_n^2},$$

або в матричному вигляді:

$$L = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}. \qquad (3.26)$$

Теорема 1

Будь - яка квадратична форма за допомогою лінійного невиродженого перетворення змінних **може бути зведена до канонічного вигляду**.

Щоб привести квадратичну форму до канонічного вигляду достатньо привести матрицю її коефіцієнтів А до діагонального вигляду.

Відмітимо, що матриця коефіцієнтів квадратичної форми $\boldsymbol{A}$ є невиродженою і можна розглядати, як матрицю лінійного перетворення. До того ж вона завжди **симетрична**.

Отже, задача зведення квадратичної форми до канонічного вигляду зводиться до задачі розшуку базису, у якому матриця лінійного перетворення $\boldsymbol{A}$ набуває діагонального вигляду. Опираючись на попередній розділ, можна стверджувати, що канонічного вигляду матриця квадратичної форми набуває у базисі, що складається з її власних векторів.

Для розв'язання останньої задачі ми можемо використати теореми **9** і **10** та **властивості власних чисел і векторів** симетричної матриці.

Алгоритм зведення квадратичної форми до канонічного вигляду.

1. Виписати з даної квадратичної форми матрицю коефіцієнтів $\boldsymbol{A}$.

Зауваження

Якщо квадратична форма дана у вигляді рівняння, то в ній доданки $a_{ij}x_ix_j$ і $a_{ji}x_jx_i$ не розрізняються в силу комутативності операції множення. Замість двох доданків у квадратичній формі стоїть один $a_{ij}x_ix_j$. У матриці квадратичної форми на місцях ij і ji стоять однакові значення – $a_{ij}/2$ (дивись приклади).

2. Побудувати характеристичний многочлен матриці $\boldsymbol{A}$. Знайти всі характеристичні числа k_i, $i=1,n$ цієї матриці. Вони завжди дійсні, оскільки матриця симетрична.

3. Для кожного власного числа знайти власний вектор.

– Якщо всі $k_i, i=1,n$ різні, то відповідні власні вектори створюють ортогональний базис, в якому матриця $\boldsymbol{A}$ набуває діагонального вигляду, у якій на діагоналі стоять власні числа k_i.

– Якщо характеристичний поліном має $p<n$ кратних коренів, то $n-p$ векторів будуть лінійно незалежними і ортогональними, а відповідні до кратних p коренів вектори будуть лінійно незалежні, ортогональні до інших $n-p$ векторів, але не ортогональні між собою. Ортогоналізуємо їх між собою, використовуючи, наприклад, їх скалярний добуток, і знов отримуємо ортогональний базис, у якому матриця $\boldsymbol{A}$ набуває діагонального вигляду з власними числами k_i на діагоналі.

Отримана матриця буде матрицею коефіцієнтів канонічної квадратичної форми.

Отже, **канонічна квадратична форма має вигляд:**

$$L = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & k_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad (3.27)$$

або $\boldsymbol{L(x_1, x_2, \dots, x_n) = k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + \dots + k_n x_n^2}$.

Теорема 2 (закон інерції квадратичних форм)

Кількість додатних (від'ємних) доданків у канонічному вигляді даної квадратичної форми **не залежить від базису**. (Як наслідок теореми 1 (п.3.6) – незалежність від базису характеристичного поліному).

Приклад 1

Знайти базис, у якому квадратична форма $L(x_1, x_2) = 13x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2$ набуває канонічного вигляду і записати цей вигляд.

Розв'язання

1. Випишемо матрицю коефіцієнтів квадратичної форми

$$A = \begin{pmatrix} 13 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Знайдемо власні числа матриці A

а) Запишемо матричне рівняння (3.20) $\boldsymbol{(A - kE)X = 0}$

$$\begin{pmatrix} 13-k & -3 \\ -3 & 5-k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

б) складемо і розв'яжемо характеристичний многочлен (3.21):

$$\begin{vmatrix} 13-k & -3 \\ -3 & 5-k \end{vmatrix} = (13-k)(5-k) - 9 = k^2 - 18k + 65 - 9 =$$

$$= k^2 - 18k + 56 = 0;$$

$k_{1,2} = 9 \pm \sqrt{81-56} = 9 \pm \sqrt{25} = 9 \pm 5;\quad k_1 = 4;\quad k_2 = 14$ – всі корені різні.

Отже, система власних векторів створює ортогональний базис.

3. Знайдемо відповідні власні вектори:

а) $\boldsymbol{k = 4}$

$$\begin{pmatrix} 13-4 & -3 \\ -3 & 5-4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

отже, $-3x_1 + x_2 = 0$, $x_2 = 3x_1$, $x_1 = c_1$, $X^{(1)} = \begin{pmatrix} c_1 \\ 3c_1 \end{pmatrix}$;

b) $\boldsymbol{k = 4}$

$$\begin{pmatrix} 13-14 & -3 \\ -3 & 5-14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

отже, $-x_1 - 3x_2 = 0$, $x_1 = -3x_2$, $x_2 = c_1$, $X^{(2)} = \begin{pmatrix} -3c_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$;

с) перевіримо вектори $\boldsymbol{X^{(1)}}$ та $\boldsymbol{X^{(2)}}$ на ортогональність:

$$\left(X^{(1)} \cdot X^{(2)}\right) = (\begin{pmatrix} c_1 \\ 3c_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3c_2 \\ c_2 \end{pmatrix}) = -3c_1c_2 + 3c_1c_2 = 0,$$

отже, власні вектори дійсно ортогональні.

Базис, в якому квадратична форма набуває канонічного вигляду, буде таким:

$$G = \left(X^{(1)}, X^{(2)}\right) = \begin{pmatrix} c_1 & -3c_2 \\ 3c_1 & c_2 \end{pmatrix}.$$

Цей базис ортогональний, але не нормований. Для отримання ортонормованого базису нормуємо вектори $X^{(1)}$ та $X^{(2)}$:

$$\left\|X^{(1)}\right\| = \sqrt{c_1^{\ 2} + \left(3c_1^{\ 2}\right)} = c_1\sqrt{1+9} = c_1\sqrt{10};$$

$$U^{(1)} = \frac{1}{c_1\sqrt{10}}\begin{pmatrix} c_1 \\ 3c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{10}} \\ \dfrac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix};$$

$$\left\| X^{(2)} \right\| = \sqrt{(-3c_2)^2 + c_2{}^2} = c_2\sqrt{9+1} = c_2\sqrt{10};$$

$$U^{(2)} = \frac{1}{c_2\sqrt{10}}\begin{pmatrix} -3c_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{3}{\sqrt{10}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}.$$

Ортонормований базис для вихідної квадратичної форми, в якому вона набуває діагонального вигляду буде:

$$U = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix};$$

Зверніть увагу: $U^T = \dfrac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix};$

$$U^{-1} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix},$$

тобто $U^T = U^{-1}$;

d) запишемо матрицю коефіцієнтів канонічної квадратичної форми:

$$A^* = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix},$$

отже, квадратична форма в базисі $\boldsymbol{U}$ буде мати вигляд:

$$\boldsymbol{L(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 14x_2^2}.$$

Приклад 2

Знайти базис, у якому квадратична форма

$$L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$$

набуває канонічного вигляду і записати цей вигляд.

Розв’язання

1. Випишемо матрицю коефіцієнтів квадратичної форми:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Знайдемо власні числа матриці A

а) Запишемо матричне рівняння (3.18) $\boldsymbol{(A - kE)X = 0}$

$$\begin{pmatrix} 1-k & 2 & -4 \\ 2 & -2-k & -2 \\ -4 & -2 & 1-k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

б) складемо і розв’яжемо характеристичний многочлен (3.19):

$$\begin{vmatrix} 1-k & 2 & -4 \\ 2 & -2-k & -2 \\ -4 & -2 & 1-k \end{vmatrix} =$$

$$= (1-k)^2(-2-k) + 16 + 16 + 16(2+k) - 4(1-k) - 4(1-k) = 0;$$

$$k^3 - 27k - 54 = 0.$$

Знайдемо корені за схемою Горнера. Ними будуть $k_1 = 6$; $k_2 = k_3 = -3$.

Маємо кратні корені, отже, другий і третій вектори будуть між собою лінійно незалежні, але не ортогональні .

3. Знайдемо відповідні власні вектори:

а) $\boldsymbol{k = 6}$

$$\begin{pmatrix} 1-6 & 2 & -4 \\ 2 & -2-6 & -2 \\ -4 & -2 & 1-6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -4 \\ 2 & -8 & -2 \\ -4 & -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Розв’яжемо систему методом Жордана-Гаусса.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 2 & -4 & 0 \\ 2 & -8 & -2 & 0 \\ -4 & -2 & -5 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -18 & -9 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Отже, з першого рівняння $x_1 = 2x_2$; $x_3 = -2x_2$. Візьмемо $x_2 = 1$, отримаємо власний вектор $X^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$;

b) $\boldsymbol{k_{2,3} = -3}$**,** корінь кратності 2

$$\begin{pmatrix} 1+3 & 2 & -4 \\ 2 & -2+3 & -2 \\ -4 & -2 & 1+3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'яжемо систему методом Жордана-Гауса.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ -4 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Згідно з теоремою 10 ранг системи $\boldsymbol{r = 3 - 2 = 1}$.
Отже, з першого рівняння $x_2 = -2x_1 + 2x_3$. Візьмемо x_1 за c_1, а x_3 за c_3 отримаємо загальний розв'язок системи

$$X = \begin{pmatrix} c_1 \\ -2c_1 + 2c_3 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Надамо вільним змінним таких значень, щоб вони склали лінійно незалежні вектори:

$c_1 = 1;\ c_3 = 0$ – отримаємо власний вектор $X^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$c_1 = 0;\ c_3 = -1$ – отримаємо власний вектор $X^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$;

c) перевіримо вектори $\boldsymbol{X}^{(1)}$ та $\boldsymbol{X}^{(2)}$ на ортогональність:

$$\left(X^{(1)} \cdot X^{(2)}\right) = (\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}) = 2 - 2 = 0,$$

отже, власні вектори дійсно ортогональні.

Перевіримо вектори $\boldsymbol{X}^{(1)}$ та $\boldsymbol{X}^{(3)}$ на ортогональність:

$$\left(X^{(1)} \cdot X^{(3)}\right) = (\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}) = 2 - 2 = 0,$$

отже, власні вектори дійсно ортогональні.

Перевіримо вектори $\boldsymbol{X}^{(2)}$ та $\boldsymbol{X}^{(3)}$ на ортогональність:

$$\left(X^{(2)} \cdot X^{(3)}\right) = (\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}) = -4 \neq 0,$$

отже, власні вектори, які відповідають кратному власному числу $\boldsymbol{k_{2,3} = -3}$ дійсно не ортогональні.

Ортогоналізуємо їх, розв'язавши систему рівнянь. Вектор $\boldsymbol{X}^{(3)}$ повинен відповідати рівнянню $x_2 = -2x_1 + 2x_3$, і повинен бути ортогональним вектору $X^{(2)} = (1, -2, 0)^T$, тобто $\left(X^{(2)} X^{(3)}\right) = x_1 - 2x_2 = 0$, отже, маємо систему:

$$\begin{cases} x_2 = -2x_1 + 2x_3 \\ x_1 = 2x_2 \end{cases},$$

$$\begin{cases} 5x_2 = 2x_3 \\ x_1 = 2x_2 \end{cases},$$

нехай $x_2 = 2$, тоді

$$x_1 = 4,\ \ x_3 = 5.$$

Обчислили власний вектор: $X^{(3)} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$. Перевіряємо його ортогональність $\boldsymbol{X}^{(1)}$ та $\boldsymbol{X}^{(2)}$:

$$\left(X^{(1)} \cdot X^{(3)}\right) = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}\right) = 8 + 2 - 10 = 0,$$

$$\left(X^{(2)} \cdot X^{(3)}\right) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}\right) = 4 - 4 = 0.$$

Отже, отримали третій вектор ортогонального базису, який складається з власних векторів. Матриця базисних векторів буде така:

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Побудуємо ортонормований базис:

$$\left\| X^{(1)} \right\| = \sqrt{4+1+4} = 3; \qquad U^{(1)T} = \frac{1}{3}(2, 1, -2),$$

$$\left\| X^{(2)} \right\| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}; \qquad U^{(1)T} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2, 0)$$

$$\left\| X^{(3)} \right\| = \sqrt{16+4+25} = 3\sqrt{5}; \qquad U^{(1)T} = \frac{1}{3\sqrt{5}}(4,2,5)$$

$$U = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

У цьому базисі матриця квадратичної форми набуває діагонального вигляду: $A^* = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, і канонічна квадратична форма буде такою:

$$\boldsymbol{L(x_1, x_2, x_3) = 6x_1^2 - 3x_2^2 - 3x_3^2}.$$

3.9 Лінійна модель обміну

Прикладом математичної моделі, яка приводить до поняття власного числа і вектора матриці є лінійна модель обміну (модель міжнародної торгівлі).

Розглянемо торгівлю між $\boldsymbol{n}$ країнами $\boldsymbol{S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n}$. Країни купують товари як у себе, так і одна у одної.

Задача

Знаючи долі національного доходу країн, які вони витрачають на закупівлю товарів на внутрішньому і зовнішньому ринках, визначити співвідношення національних доходів цих країн для збалансованої торгівлі.

Математична модель задачі

Національний дохід кожної країни становить відповідно $\boldsymbol{x_1, x_2, x_3 \ldots, x_n}$ **грош**. **од**. Позначимо долю національного доходу, яку країна $\boldsymbol{S_j}$ витрачає на купівлю товарів у країни $\boldsymbol{S_i}$, як коефіцієнт a_{ij}. Тобто на купівлю товарів у країни S_i країна S_j витрачає суму $a_{ij}x_j$ **грош. од**. Вважається, що весь національний дохід витрачається країною або на закупку своїх товарів або на імпорт з інших держав. Тобто в долях

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1,\ j = 1,2,...,n\,. \tag{3.28}$$

Для будь-якої країни S_i, яка продає товар, прибуток від внутрішньої і зовнішньої торгівлі становить величину p **грош. од**., тобто

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = p_i\,.$$

Для збалансованої торгівлі необхідно, щоб прибуток S_i країни від торгівлі був не менший за національний дохід: $p_i \geq x_i$.

Перевіримо, чи може прибуток перевищувати національний дохід, тобто $p_i > x_i$. Щоб зробити перевірку запишемо дану нерівність для кожної країни. Отримаємо систему нерівностей:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n > x_1\,, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n > x_2\,, \\ &... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \\ &a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n > x_n\,. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Додамо всі нерівності системи. Після групування доданків отримаємо:

$$\left(a_{11} + a_{21} + ... + a_{n1}\right)x_1 + \left(a_{11} + a_{21} + ... + a_{n1}\right)x_2 + ... +$$
$$+ \left(a_{11} + a_{21} + ... + a_{n1}\right)x_n > x_1 + x_2 + ... + x_n\,.$$

Згідно (3.24) сума в дужках дорівнює 1. Отже, отримали протиріччя:

$$x_1 + x_2 + ... + x_n > x_1 + x_2 + ... + x_n\,.$$

Цим самим ми довели, що прибуток не може бути **більшим** за національний дохід країни. **Економічний зміст** твердження –

всі країни разом не можуть одночасно отримати прибуток. Отже, вірною буде тільки рівність $\boldsymbol{p_i = x_i; \quad i = 1,2,...,n}$, або

$$\boldsymbol{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = x_1}$$
$$\boldsymbol{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = x_2}$$
$$... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ...$$
$$\boldsymbol{a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = x_n}.$$

У матричному запису це буде рівняння:

$$\boldsymbol{AX = X}, \tag{3.30}$$

де $\boldsymbol{X}$ – вектор національних доходів країн, $\boldsymbol{X^T = (x_1, x_2, ..., x_n)^T}$. $\boldsymbol{A}$ – ***Структурна матриця торгівлі***, або її ще називають п***родуктивною матрицею***.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix},$$

всі елементи цієї матриці $\boldsymbol{|a_{ij}| < 1}$, матриця $\boldsymbol{A}$ – ***невироджена.***

Отже, задача зведена до задачі обчислення власного вектора структурної матриці торгівлі, який відповідає власному числу $\boldsymbol{k = 1}$. Рівняння (3.30) можна записати так

$$\boldsymbol{(A - E)X = 0}. \tag{3.31}$$

Приклад

Структурна матриця торгівлі 3-х країн має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

Знайти національні доходи країн для збалансованої торгівлі.

Розв'язання

Необхідно знайти власний вектор матриці $\boldsymbol{A}$ для власного числа $\boldsymbol{k=1}$, для цього необхідно розв'язати систему (3.31), або

$$(A-E)X=\begin{pmatrix} \frac{1}{3}-1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2}-1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0\,.$$

Розв'язавши її, наприклад, методом Гауса, отримаємо розв'язок: $x_1=(3/2)c;\ x_2=2c;\ x_3=c$, або власний вектор

$$X=\begin{pmatrix} \frac{3}{2}c \\ 2c \\ c \end{pmatrix},$$

де c – довільна стала.

Висновок

Отриманий результат означає, що для збалансованої торгівлі необхідно, щоб національні доходи даних країн мали співвідношення: (3/2):2:1.

§ 4 ВЕКТОРНА АЛГЕБРА ПРОСТОРІВ R^2 ТА R^3

У пункті 3.3 попереднього розділу нами було дано означення евклідового простору R^n, як лінійного простору із скалярним добутком. За приклади такого простору можуть бути розглянуті простір векторів у R^2 (на площині) і простір векторів у R^3 (в нашому звичайному тривимірному просторі). Розглянемо ці простори докладніше.

4.1 ОСНОВНІ ОЗНАЧЕННЯ ВЕКТОРА ТА ХАРАКТЕРИСТИКИ

Означення 1

Геометричним вектором називається відрізок, який характеризується не тільки своїм розміром (тобто числом), але й напрямом у просторі. Позначаються вектори літерами латинського алфавіту або жирними, або літерами з рискою нагорі. Наприклад, $\vec{a}, \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{c}$. Довжина вектора називається його **модулем** і позначається $|\vec{a}|$, $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, $|\mathbf{c}|$ (дивись рисунок 1).

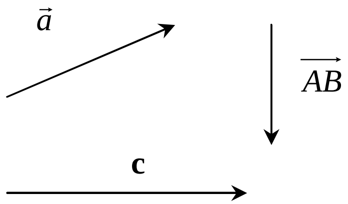


Рисунок 1

Нульовим вектором називають вектор, у якого збігаються початок і кінець, позначається такий вектор $\vec{0}$. Такий вектор має **нульову довжину,** а **напрям – довільний**.

Два вектори $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ називаються **рівними**, якщо вони мають однакові довжини і напрями: $\mathbf{a} = \mathbf{b}$.

Колінеарними називаються вектори, які розміщені на одній прямій або на паралельних прямих (дивись рисунок 2). Колінеарні вектори мають пропорційні координати, тобто, якщо $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ колінеарні і $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, то $\vec{b} = (ka_x, ka_y, ka_z) =$ $= k(a_x, a_y, a_z) = k\vec{a}$, де k – коефіцієнт пропорційності, дійсне число.

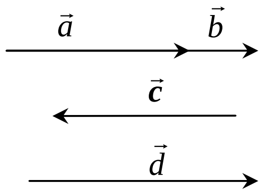


Рисунок 2

Протилежними називаються колінеарні вектори однакової довжини, які мають протилежний напрям у просторі. Вектор, протилежний вектору **а** позначають **-а**.

Ортом вектора **а** називається колінеарний йому вектор одиничної довжини $\mathbf{a}^0$, $\left|\overrightarrow{a^0}\right| = 1$. Вектор **а** можна подати як $\vec{a} = |a| \cdot \overrightarrow{a^0}$.

Компланарними називаються вектори, які лежать в одній площині.

Геометрично вектори подаються в просторі або на площині за допомогою декартової системи координат.

Декартова система координат на площині має горизонтальну вісь, спрямовану праворуч, вісь **абсцис** OX **,** та вертикальну вісь, спрямовану знизу вгору, вісь **ординат** OY **.** Точка їх перетину позначається за точку O. Осі абсцис та ординат, маючи напрями, є векторами і мають свої орти. Орт осі абсцис OX позначається $\mathbf{i}$, а орт осі ординат OY позначається $\mathbf{j}$.

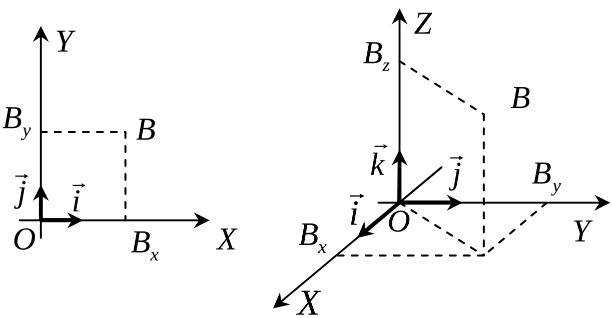


Рисунок 3

Права декартова система координат у просторі має вісь абсцис OX, направлену на глядача, вісь ординат OY, направлену праворуч і третю вісь – вісь **аплікат** OZ, яка направлена знизу вгору і перпендикулярна площині, створеній осями абсцис і ординат. Точка перетину трьох осей – точка O. Орти осей абсцис і ординат позначаються так само, як і на площині $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, орт осі аплікат позначається $\mathbf{k}$ (дивись рисунок 3).

Проекцією точки B **на вісь** називається точка перетину перпендикуляру із точки B на вісь з самою віссю.

У просторі R^2 точка має 2 проекції: на вісь OX **(абсциса)** та на вісь OY **(ордината).** Впорядкована пара проекцій – абсциса і ордината – точки B називається її **координатами**. В просторі $\mathbf{R}^3$ точка має ще одну проекцію – проекцію на вісь OZ, яка називається **аплікатою**. Координатами точки В у просторі R^3 є **впорядкована трійка проекцій –** абсциса, ордината і апліката.

Розглянемо довільний вектор $\overrightarrow{AB}$ і будь яку вісь $\boldsymbol{l}$. Точка A є початком вектора, точка B – кінцем. Проекцію точки A на вісь $\boldsymbol{l}$ позначимо A_1, а проекцію точки B – B_1. Відрізок A_1B_1 можна розглядати як вектор вздовж $\boldsymbol{l}$ с напрямом від A_1 до B_1.

Означення 2

Проекцією вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь $\boldsymbol{l}$ називається довжина вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$, взята із знаком „+”, якщо напрям $\overrightarrow{A_1B_1}$ та $\boldsymbol{l}$ збігаються, і зі знаком „–”, коли їх напрями протилежні. Позначають проекцію: $np_l\,\overrightarrow{AB}$ (дивись рисунок 4)

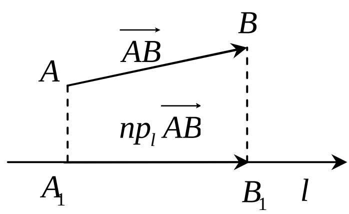


Рисунок 4

Кутом між двома векторами (або між вектором і віссю) називають найменший кут між їх напрямами, якщо вектори зведені до спільної точки (дивись рисунок 5).

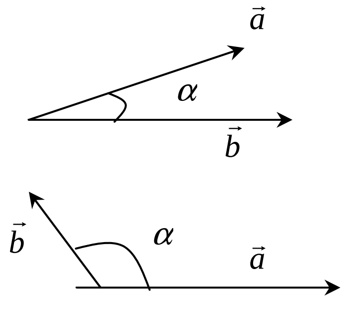


Рисунок 5

Проекцію вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ на вісь ***l*** знаходять за формулою

$$np_l \overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \cos\alpha, \tag{4.1}$$

де α - кут між вектором $\overrightarrow{AB}$ і віссю ***l***.

Координатою вектора відносно осі *l* $\overrightarrow{AB}$ називають його проекцію на цю вісь. Оскільки проекція $np_l \overrightarrow{AB}$ є **вектор вздовж осі *l***, його довжину можна обчислити як різницю між координатою кінцевої точки і початкової:

$$np_l \overrightarrow{AB} = B_l - A_l. \tag{4.2}$$

Розглянемо вектор $\mathbf{a}$ простору R^3. Декартова система координат цього простору має три осі OX **,** OY **,** OZ . Отже, довільних вектор $\mathbf{a}$ в цьому просторі задається трьома проекціями на відповідні осі, тобто трьома координатами. Позначимо їх так:

a_x - проекція на вісь OX , або абсциса вектора;

a_y - проекція на вісь OY , або ордината вектора;

a_z - проекція на вісь OZ , або апліката вектора.

Отже, у просторі R^3 вектор задається трьома координатами: $\mathbf{a} = \left(a_x, a_y, a_z\right)$. Якщо кути нахилу вектора $\mathbf{a}$ до осей позначити через α (кут між вектором $\mathbf{a}$ та віссю OX), β (кут між вектором $\mathbf{a}$ та віссю OY), γ (кут між вектором $\mathbf{a}$ та віссю OZ), то кожну з координат можна знайти за формулою (4.1)

$$a_x = |\mathbf{a}| \cdot \cos\alpha, \quad a_y = |\mathbf{a}| \cdot \cos\beta, \quad a_z = |\mathbf{a}| \cdot \cos\gamma. \tag{4.3}$$

З іншого боку, якщо позначити координати початкової і кінцевої точок вектора $\mathbf{a}$ на вісь OX через x_1 та x_2 відповідно координати тих самих точок вектора $\mathbf{a}$ на вісь OY через y_1 та y_2, а на вісь OZ через z_1 та z_2, то координати вектора $\mathbf{a}$ можна знайти і за формулою (4.2)

$$a_x = x_2 - x_1, \quad a_y = y_2 - y_1, \quad a_z = z_2 - z_1. \tag{4.4}$$

Отже, вектор $\mathbf{a}$ може бути трійкою координат $\mathbf{a} = \left(a_x,\ a_y,\ a_z\right) = \left(x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1\right)$.

Кути нахилу до осей знаходяться за формулами:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\mathbf{a}|} = \frac{x_2 - x_1}{|\mathbf{a}|}; \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\mathbf{a}|} = \frac{y_2 - y_1}{|\mathbf{a}|};$$

$$\cos\gamma = \frac{a_z}{|\mathbf{a}|} = \frac{z_2 - z_1}{|\mathbf{a}|}. \tag{4.5}$$

У просторі R^2 (площина) всі вищенаведені розмірковування і формули є теж вірними з тією різницею, що на площині відсутній третій вимір, тобто відсутні третя вісь OZ і відповідно третя координата (апліката) і кут γ.

Означення 3

Два вектори $\vec{a}\left(a_x, a_y, a_z\right)$ і $\vec{b}\left(b_x, b_y, b_z\right)$називаються **колінеарними,** якщо кут між ними становить 0° або 180°. У першому випадку вектори називаються **відповідно направленими,** в другому – **протилежно направленими.** Відповідні координати колінеарних векторів **пропорційні між собою**, тобто

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = k \text{, або}$$

для двох колінеарних векторів вірно

$$\vec{b} = \left(ka_x, ka_y, ka_z\right) = k\left(a_x, a_y, a_z\right).$$

Знак множника k залежить від напряму векторів. Якщо колінеарні вектори **відповідно** направлені, то $k > 0$, якщо ж **протилежні**, то $k < 0$.

Означення 4

Два вектори називаються **ортогональними**, якщо кут між ними становить $\pm 90°$.

4.2 Дії над векторами в просторах R^2 та R^3

У цьому розділі ми дамо означення **суми** та **різниці**, **векторного добутку, змішаного добутку** двох векторів, а також згадаємо про **скалярний добуток** векторів стосовно до просторів R^2 та R^3.

Означення 1

Розглянемо два довільних вектори **a** і **b**. Паралельним переносом зведемо їх до однієї спільної точки. Отримали кут. Добудуємо його до паралелограма. Проведемо в ньому діагоналі (дивись рисунок 6).

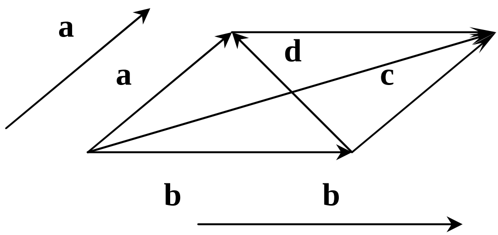


Рисунок 6

Одна з них виходить із точки стику векторів, друга з'єднує вершини векторів. Надамо першій діагоналі напрям від точки стику до протилежної вершини паралелограма. Отримаємо вектор $\mathbf{c}$. Другій надамо напрям від вершини вектора $\mathbf{b}$ до вершини вектора $\mathbf{a}$. Отримаємо вектор $\mathbf{d}$. Вектор $\mathbf{c}$ є **сумою двох векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$**, вектор **$\mathbf{d}$ – їх різницею**, тобто

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}; \quad \mathbf{d} = \mathbf{a} - \mathbf{b}.$$

Означення 2

Скалярний добуток двох векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ у довільному просторі дорівнює

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos\alpha, \tag{4.6}$$

де α - кут між даними векторами.

Крім того, застосовуючи формулу (3.4) для векторів просторів R^2 та R^3, можна записати для R^2:

$$\forall \ \vec{a} = (x_1, y_1), \ \vec{b} = (x_1, y_1), \ (\vec{a}, \vec{b}) = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2. \tag{4.7}$$

Звідси випливає формула для знаходження модуля вектора, якщо $\mathbf{a} = (x, y)$, $(\vec{a}, \vec{a}) = \vec{a}^2 = x^2 + y^2$, то

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{4.8}$$

Для простору R^3 всі викладки аналогічні з додаванням ще однієї координати:

$$\forall \ \vec{a} = (x_1, y_1, z_1), \ \vec{b} = (x_1, y_1, z_1), \ (\vec{a}, \vec{b}) = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2. \quad (4.7)^*$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (4.8)^*$$

Твердження

Скалярний добуток ортогональних векторів **завжди** дорівнює 0 (витікає з формули (4.6)).

Приклад 1

Знайти кут між векторами $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$, якщо відомо, що

$$\left|\vec{a}\right| = 3,\ \left|\vec{b}\right| = 2,\ \left(3\vec{a} + 4\vec{b}\right)^2 + \left(\vec{a} - \vec{b}\right)^2 = 200 .$$

Розв'язання

Подамо

$$\left(3\vec{a} + 4\vec{b}\right)^2 = \left(\left(3\vec{a} + 4\vec{b}\right)\cdot\left(3\vec{a} + 4\vec{b}\right)\right),$$

$$\left(\vec{a} - \vec{b}\right)^2 = \left(\left(\vec{a} - \vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a} - \vec{b}\right)\right).$$

Тоді за властивостями скалярного добутку можна виконати перетворення

$$\left(\left(3\vec{a} + 4\vec{b}\right)\cdot\left(3\vec{a} + 4\vec{b}\right)\right) = 9\vec{a}^{\,2} + 24\left(\vec{a},\vec{b}\right) + 16\vec{b}^{\,2} =$$

$$= 9\cdot 3^2 + 24\cdot\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\left(\vec{a}\vec{b}\right) + 16\cdot 4 = 145 + 144\cdot\cos\left(\vec{a}\vec{b}\right).$$

$$\left(\left(\vec{a} - \vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a} - \vec{b}\right)\right) = \vec{a}^{\,2} - 2\left(\vec{a},\vec{b}\right) + \vec{b}^{\,2} =$$

$$= 9 - 2\cdot 6\cdot\cos\left(\vec{a}\vec{b}\right) + 4 = 13 - 12\cdot\cos\left(\vec{a}\vec{b}\right).$$

Підставимо отримані вирази до вихідного рівняння, отримаємо:

$$145 + 144\cdot\cos\left(\vec{a}\vec{b}\right) + 13 - 12\cdot\cos\left(\vec{a}\vec{b}\right) = 200;$$

$$132\cdot\cos\left(\vec{a}\vec{b}\right) = 200 - 158 = 42 .$$

Отже, $\cos\left(\vec{a}\vec{b}\right) = \dfrac{42}{132} \approx 0.32$.

Кут між векторами $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ буде $\approx 71^\circ$.

Означення 3

Векторним добутком двох векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ є вектор $\mathbf{c}$**,** який задовольняє трьом умовам:

1) вектор $\mathbf{c}$ ортогональний площині, яку створюють вектори $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$. Тобто $\vec{a} \perp \vec{c},\ \vec{b} \perp \vec{c}$

2) модуль вектора дорівнює $\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\alpha$, де α - кут між $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$**.**

3) якщо дивитися з вершини вектора $\mathbf{c}$, то найкоротший поворот від вектора $\mathbf{a}$ до вектора $\mathbf{b}$ виконується проти годинникової стрілки (дивись рисунок 7).

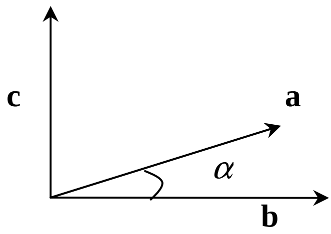


Рисунок 7

Позначається векторний добуток $\vec{c} = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$.

Обчислюється за формулою

$$\mathbf{c} = \left(\mathbf{a} \times \mathbf{b}\right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}, \qquad (4.9)$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - орти, $\vec{a} = \left(a_x, a_y, a_z\right)$, $\vec{b} = \left(b_x, b_y, b_z\right)$.

Властивості векторного добутку:

1) Операція не комутативна, тобто $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = -\left(\vec{b} \times \vec{a}\right)$. Це означає, що, якщо за перший множник брати вектор $\mathbf{b}$, то вектор $\mathbf{c}$ буде направлений униз.

2) Операція дистрибутивна: $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$.

3) $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = 0$ тоді і тільки тоді, коли вектори колінеарні, тобто кут між ними становить або 0° або 180° (витікає з другої умови означення векторного добутку).

4) Якщо $\alpha \in R$, то його можна виносити за операцію векторного добутку:

$$\left(\left(\alpha\vec{a}\right) \times \vec{b}\right) = \left(\vec{a} \times \left(\alpha\vec{b}\right)\right) = \alpha \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right).$$

5) Якщо на векторах **a** і **b** побудувати паралелограм, як на сторонах, то його площа буде дорівнювати довжині вектора $\vec{c} = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$, тобто $S = \left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)\right|$. Враховуючи (4.9)

$$S = \sqrt{\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}^2} .$$

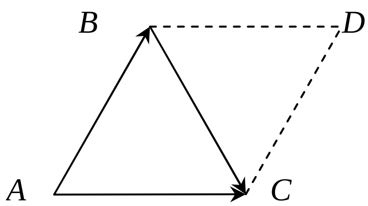
Приклад 2

Обчислити площу трикутника ABC, якщо відомі координати його вершин $A(0;1;-1)$, $B(2;4;1)$ і $C(3;5;2)$.

Розв'язання

Виходячи з п'ятої властивості векторного добутку для знаходження $S_{\Delta ABC}$, можна використати факт, що $S_{\Delta ABC}$ дорівнює половині площі відповідного паралелограма. Якщо ввести вектори $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$, то

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|.$$



Знаходимо координати векторів

$\overrightarrow{AB} = \left(2-0; 4-1; 1-(-1)\right) = (2;3;2)$ та

$\overrightarrow{AC} = \left(3-0; 5-1; 2-(-1)\right) = (3;4;3)$.

Тоді за формулою (1.8) знаходимо

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot A_{11} + \vec{j} \cdot A_{12} + \vec{k} \cdot A_{13} = \vec{i}\,(-1)^{1+1} M_{11} +$$

$$+\vec{j}(-1)^{1+2}M_{12}+\vec{k}(-1)^{1+3}M_{13}=\vec{i}M_{11}-\vec{j}M_{12}+\vec{k}M_{13}=$$

$$=\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}3 & 2\\ 4 & 2\end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix}2 & 2\\ 3 & 3\end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 4\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}\cdot(6-8)-\vec{j}\cdot 0+\vec{k}\cdot(8-9)=-2\vec{i}-\vec{k}\,.$$

Модуль векторного добутку

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(-2)^2+0^2+(-1)^2}=\sqrt{5}\,,$$

а, отже, площа $S_{\Delta ABC}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ (кв. од.)

Означення 4

Мішаним добутком векторів $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ називається **число**, яке дорівнює скалярному добутку векторного добутку векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ на вектор $\mathbf{c}$. Позначається: $\left(\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right)$. Якщо відомі координати векторів $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$, $\vec{c}=(c_x,c_y,c_z)$, то мішаний добуток можна знайти за формулою

$$\left(\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right)=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}. \qquad (4.10)$$

Властивості мішаного добутку:

1) $\left(\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right)=0$ тоді і тільки тоді, коли всі три вектори лежать в одній площині, тобто – **компланарні.**

Дійсно, векторний добуток векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ є вектор (назвемо його $\mathbf{d}$), перпендикулярний площині, створеній цими векторами. Оскільки скалярний добуток $\mathbf{d}$ і $\mathbf{c}$ дорівнює 0, то ці вектори теж перпендикулярні, тобто отримали: $\vec{d}\perp\vec{a}$, $\vec{d}\perp\vec{b}$, $\vec{d}\perp\vec{c}$, тобто $\mathbf{c}$ теж лежить в площині, яку створили вектори $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$.

2) Вектори мішаного добутку можна міняти місцями послідовним зсувом вліво. При цьому операції залишаються на тих самих місцях

$$\left(\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right)=\left(\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{a}\right)=\left(\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\cdot\vec{b}\right).$$

Вірність цієї властивості легко перевіряється з використанням формули (4.10) і властивостей визначника:

$$\left(\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right)=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix},$$

$$\left(\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{a}\right)=\begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix},$$

$$\left(\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right)=\begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

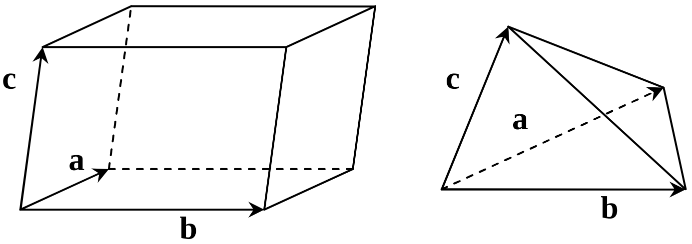
У кожній з формул, починаючи з другої, верхній рядок зміщений на два рядки порівняно з попередньою формулою. Із властивостей визначника відомо, що переміщення визначника на парну кількість рядків не змінює ні число, ні знак. Отже, всі три формули відображають одне й те саме число.

3) Модуль мішаного добутку дорівнює об’єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ і $\mathbf{c}$ (дивись рисунок 8 а). Тобто

$$V_{пар}=\left(\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right)=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \qquad (4.11)$$

Об’єм піраміди, побудованої на векторах $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ і $\mathbf{c}$, дорівнює (дивись рисунок 8 б)

$$V_{пір}=\frac{1}{6}\left(\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right)=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \qquad (4.12)$$



а) б)

Рис. 8

Приклад 3

Обчислити об'єм піраміди, вершини якої $A(4;-2;0)$, $B(0;-1;1)$, $C(2;4;1)$ та $D(3;1;4)$.

Розв'язання

Виконаємо схематичний малюнок.

Вводимо вектори $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{AB}=(0-4;-1-(-2);\ 1-0)=(-4;\ 1;\ 1)$,

$\overrightarrow{AC}=(2-4;\ 4-(-2);\ 1-0)=(-2;\ 6;\ 1)$,

$\overrightarrow{AD}=(3-4;\ 1-(-2);\ 4-0)=(-1;\ 3;\ 4)$.

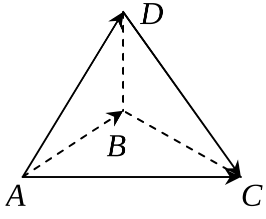


Рис. 9

$$\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}-4 & 1 & 1\\ -2 & 6 & 1\\ -1 & 3 & 4\end{vmatrix}\begin{array}{cc}-1 & -4\\ & \\ & \end{array}$$

$$=\begin{vmatrix}-4 & 1 & 1\\ 2 & 5 & 0\\ 15 & -1 & 0\end{vmatrix}=1\cdot A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & 5\\ 15 & -1\end{vmatrix}=-2-75=-77\,.$$

Тоді за формулою (4.12) маємо: $V_{\text{пір}}=\dfrac{1}{6}\cdot\left|-77\right|=\dfrac{77}{6}$ (куб. од.).

§ 5 АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

5.1 Предмет і задачі аналітичної геометрії

Предметом вивчення аналітичної геометрії є вивчення геометричних об'єктів алгебраїчними методами.

Тобто геометричним об'єктам за певними законами ставляться у відповідність числа. Основним способом встановлення такої відповідності є **декартові система координат.**

Найпростішому геометричному об'єктові – точці у відповідність ставиться упорядкована множина чисел – її координат. Інші лінії на площині розглядаються як геометричні місця точок (**г.м.т**.), що відповідають деяким умовам.

Закони, які встановлюють відповідність лінії, до умов утворюють рівняння даної лінії. Якщо лінія задана рівнянням, то говорять, що вона задана **аналітично**. Досліджуючи ці аналітичні рівняння, можна вивчати властивості відповідного геометричного об'єкта.

В аналітичній геометрії розглядаються дві основні задачі

1) Складання рівняння геометричного об'єкта, який розглядається, як г.м.т., яке відповідає певним умовам.

2) Дослідження властивостей геометричного об'єкта за його рівнянням і побудова об'єкта.

Найпростіші задачі аналітичної геометрії:

1) Знаходження відстані між двома точками.

2) Ділення відрізка у заданому відношенні.

Розглянемо наведені найпростіші задачі.

1) Знаходження відстані між двома точками

Нехай задані точки $\boldsymbol{M_1}$ та $\boldsymbol{M_2}$. Кожна з точок у своєму просторі задається впорядкованою множиною чисел – координатами. Для $\boldsymbol{R^2}$ це дві пари чисел $\boldsymbol{M_1(x_1,\, y_1)}$ та $\boldsymbol{M_2(x_2,\, y_2)}$. Для $\boldsymbol{R^3}$ - дві трійки $\boldsymbol{M_1(x_1,\, y_1,\, z_1)}$ та $\boldsymbol{M_2(x_2,\, y_2,\, z_2)}$. Для $\boldsymbol{R^n}$ - $\boldsymbol{M_1(x_{11},\, x_{21},\ldots,x_{n1})}$ та $\boldsymbol{M_2(x_{12},\, x_{22},\ldots,x_{n2})}$. Відстань між двома точками дорівнює довжині вектора $\boldsymbol{M_1M_2}$, який має за координати різниці відповідних координат точок $\boldsymbol{M_1}$ та $\boldsymbol{M_2}$. Використовуючи (4.8), запишемо формули для розрахунку відстані між двома точками у лінійних просторах різних вимірів:

Для $\boldsymbol{R^2}$: $\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ (5.1)

Для $\boldsymbol{R^3}$: $\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)}$ (5.2)

Для $\boldsymbol{R^n}$: $\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_{12}-x_{11})^2+(x_{22}-x_{21})^2+\ldots+(x_{n2}-x_{n1})}$

2) Ділення відрізка у заданому відношенні

Нехай відомі координати точок $A(x_1,\, y_1,\, z_1)$ і $B(x_2,\, y_2,\, z_2)$ відрізку у просторі $\boldsymbol{R^3}$. Відомо також, що точка $M(x,\, y,\, z)$ ділить відрізок AB у відношенні $\dfrac{AM}{MB}=k$. (рисунок 10).

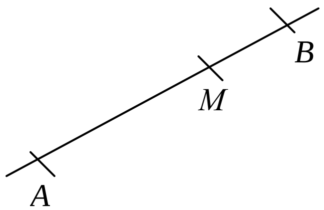


Рисунок 10

Необхідно знайти координати точки $M(x,\ y,\ z)$.

Розглянемо вектори $\overrightarrow{AM}$ та $\overrightarrow{MB}$. З співвідношення $\dfrac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MB}} = k$ випливає, що $\overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{MB}$, тобто вектори $\overrightarrow{AM}$ і $\overrightarrow{MB}$ колінеарні і їхні координати пропорційні.

Вектор $\overrightarrow{AM} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$, вектор $\overrightarrow{MB} = (x_2 - x, y_2 - y, z_2 - z)$.

Відношення координат цих векторів буде:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \frac{z - z_1}{z_2 - z} = k.$$

З рівності $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x} = k$ отримаємо

$x - x_1 = k(x_2 - x)$; $x(1 + k) = x_1 + kx_2$, отже,

$$x = \frac{x_1 + kx_2}{1 + k}.$$

Ці ж викладки є вірними для інших координат.

Тобто координати точки $M(x; y; z)$, яка ділить відрізок AB у відношенні $k:1$ будуть:

$$x = \frac{x_1 + kx_2}{1 + k}; \quad y = \frac{y_1 + ky_2}{1 + k}; \quad z = \frac{z_1 + kz_2}{1 + k}. \tag{5.3}$$

Приклад

Знайти відстань між точками $A(6,-2,-1)$ та $B(2,-4,3)$ та координати точки $M(x,\ y,\ z)$, яка ділить відрізок $\boldsymbol{AB}$ у відношенні 1:3.

Розв'язання

1) Згідно формули (5.2),

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 + (z_b - z_a)^2} =$$

$= \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{16+4+16} = 6$.

2) Точка $M(x,\ y,\ z)$ ділить AB у відношенні 1:3, тобто $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{1}{3}$. Отже, $k = 1/3$.

Підставимо у формулу (5.3):

$$x = \frac{x_A + \frac{1}{3}x_B}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3\cdot 6 + 2}{3+1} = \frac{20}{4} = 5;$$

$$y = \frac{y_A + \frac{1}{3}y_B}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3\cdot(-2) - 4}{3+1} = \frac{-10}{4} = -2{,}5;$$

$$z = \frac{z_A + \frac{1}{3}z_B}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3\cdot(-1) + 3}{3+1} = \frac{0}{4} = 0.$$

Відповідь

Координати точки $\boldsymbol{M}$, яка ділить відрізок $\boldsymbol{AB}$ у відношенні 1:3 будуть:

$x = 5$; $y = -2{,}5$; $z = 0$.

5.2 Аналітична геометрія на площині

5.2.1 Рівняння лінії

Означення

Рівнянням лінії $\boldsymbol{L}$ на площині називають рівняння вигляду $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ за умов:

1) Кожна точка $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$ лінії $\boldsymbol{L}$ задовольняє цьому рівнянню;

2) Ніяка інша точка площини $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$, яка не належить $\boldsymbol{L}$, не задовольняє рівнянню.

Найпростішою лінією на площині є пряма. Задати рівняння прямої означає скласти математичні умови розміщення цієї прямої відносно осей декартової системи координат. Залежно від вигляду умов, можна отримати декілька різновидів рівняння прямої. Наприклад, канонічне рівняння прямої, рівняння прямої у відрізках, параметричне завдання прямої і т. ін.

Для побудови рівняння прямої на площині будемо використовувати апарат векторної алгебри.

5.2.2 Рівняння прямої. Кут між прямими. Умови паралельності та перпендикулярності двох прямих

Розглянемо пряму в площині XOY (тобто в просторі $\boldsymbol{R}^2$). Нагадаємо, що вектори простору $\boldsymbol{R}^2$ задаються парою впорядкованих координат – абсцисою і ординатою.

а) Рівняння прямої, яка проходить через точку $\boldsymbol{M_0}(\boldsymbol{x_0}\,;\boldsymbol{y_0})$ перпендикулярно до вектора $\vec{\boldsymbol{n}}=(\boldsymbol{A};\boldsymbol{B})$.

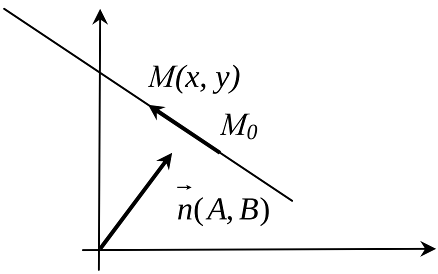


Рисунок 11

Розглянемо довільну точку прямої $M(x;y)$ та вектор $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0;y-y_0)$ (рисунок 11). За умовою задачі $\overrightarrow{M_0M}$ та $\vec{n}(A,B)$ ортогональні, тобто їх скалярний добуток дорівнює нулю:

$$\left(x - x_0\right) \cdot A + \left(y - y_0\right) \cdot B = 0\,. \tag{5.4}$$

Отримали рівняння прямої, що проходить через точку M_0 ортогонально до $\vec{n}\left(A, B\right)$. Кожна точка цієї прямої задовольняє задані умови і ніяка інша точка площини не задовольняє отримане рівняння.

Вектор $\vec{n}\left(A, B\right)$ носить назву **нормального вектора прямої**, або її **нормалі**.

Якщо в рівнянні (5.4) розкрити дужки і привести подібні члени, отримаємо новий вигляд рівняння тієї самої прямої

$$Ax + By + D = 0\,;\;\; D = -Ax_0 - By_0 - \textit{число}\,. \tag{5.5}$$

Рівняння виду (5.5) називається ***загальним рівнянням прямої.***

Теорема

Будь - яке рівняння першої степені відносно змінних $\boldsymbol{x}$ та $\boldsymbol{y}$ **є рівнянням прямої лінії на площині.**

Дослідимо загальне рівняння прямої

Нехай в рівнянні (5.5) $D = 0$. Маємо

$$Ax + By = 0\,. \tag{5.6}$$

Це рівняння задовольняє точка $\left(0{,}0\right)$. Тому рівняння (5.6) – **рівняння прямої, що проходить через початок системи координат** (рисунок 12 а).

Нехай в (5.5) $A = 0$. Маємо

$$By + D = 0\,. \tag{5.7}$$

Тобто $y = -\dfrac{D}{B}$ для довільного значення $\boldsymbol{x}$.

Отже, рівняння (5.7) **є рівнянням прямої, паралельної осі $\boldsymbol{OX}$, яка відсікає від осі $\boldsymbol{OY}$ відрізок $-\boldsymbol{D}/\boldsymbol{B}$**. (рисунок 12 б).

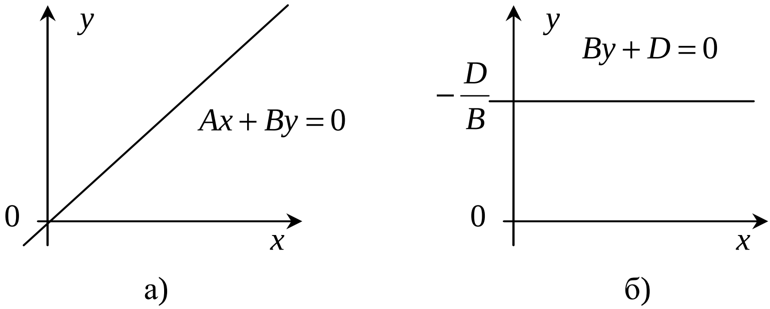


Рисунок 12

Нехай в (5.5) $B = 0$. Маємо

$$Ax + D = 0. \tag{5.8}$$

Тобто $x = -\frac{D}{A}$ для довільного значення y.

Отже, рівняння (5.8) **є рівнянням прямої, паралельної осі** $\boldsymbol{OY}$, **яка відсікає від осі** $\boldsymbol{OX}$ **відрізок** $\boldsymbol{-D/A}$ (рисунок 13 а),

– якщо в (5.5) $D \neq 0$, то це рівняння можна записати так

$$Ax + By = -D,$$

або

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}} + \frac{y}{-\frac{D}{B}} = 1.$$

Позначимо $-\frac{D}{A} = a$; $-\frac{D}{B} = b$. Тоді загальне рівняння набуває вигляду

$$\boldsymbol{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}. \tag{5.9}$$

Таке рівняння прямої має назву **рівняння прямої у відрізках**. У цьому рівнянні величини $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ є відрізками, які відсікає пряма на осях OX та OY відповідно (рисунок 13 б).

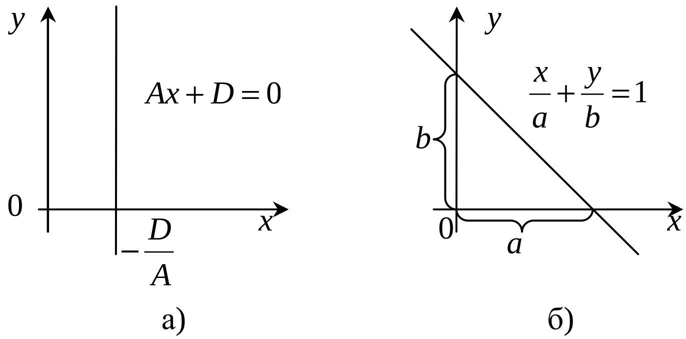


Рисунок 13

Розглянемо дві прямі, задані загальними рівняннями:

$A_1x + B_1y = D_1$; $A_2x + B_2y = D_2$.

Дані прямі будуть **паралельними**, якщо колінеарними будуть їхні нормалі $\vec{n}_1(A_1, B_1)$ та $\vec{n}_2(A_2, B_2)$, тобто, якщо для прямих виконується співвідношення

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}. \tag{5.10}$$

Ці прямі будуть **перпендикулярними**, якщо ортогональні їхні нормалі, тобто якщо

$(\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2) = A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

Якщо прямі перетинаються під довільним кутом, то кут між цими прямими дорівнює куту між нормалями. Тому **косинус кута між ними** можна знайти через скалярний добуток нормалей

$(\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2) = |\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2| \cos\varphi$, отже,

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^{\ 2} + B_1^{\ 2}} \cdot \sqrt{A_2^{\ 2} + B_2^{\ 2}}}. \tag{5.11}$$

Відстань від точки $M_0(x_0, y_0)$ **до прямої**, заданої загальним рівнянням (5.5), можна знайти за формулою

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (5.12)$$

Якщо рівняння (5.5) розв’язати відносно y, тобто

$y = -\frac{A}{B}x - \frac{D}{B}$, та перепозначити $-\frac{A}{B} = k$, $-\frac{D}{B} = b$, отримаємо ще один вид рівняння прямої

$$y = kx + b. \qquad (5.13)$$

Таке рівняння носить назву **рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом** (рисунок 14).

У цьому рівнянні $k = \operatorname{tg}\varphi$ – кутовий коефіцієнт нахилу прямої до осі OX (за умови, що φ – кут між додатним напрямом осі OX та прямою l, відрахований проти годинникової стрілки); b – відрізок, який відтинає пряма на осі OY.

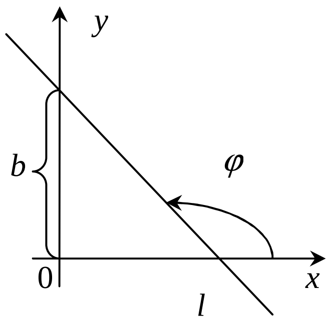


Рисунок 14

Якщо пряма проходить **через точку $M_0(x_0, y_0)$, а її кутовий коефіцієнт дорівнює k**, то рівняння прямої має вигляд

$$y - y_0 = k(x - x_0). \qquad (5.14)$$

Нехай задані дві прямі $l_1 : y = k_1x + b_1$ та $l_2 : y = k_2x + b_2$. Із рівнянь відомі $\operatorname{tg}\varphi_1 = k_1$ і $\operatorname{tg}\varphi_2 = k_2$ (рисунок15).

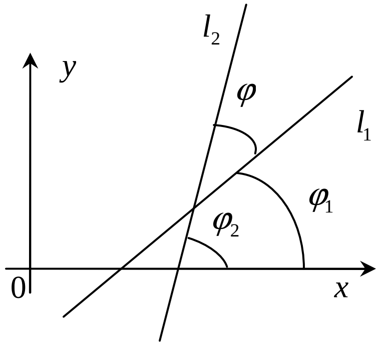


Рисунок 15

Кут φ між прямим є різниця $\varphi_2 - \varphi_1$. Розглянемо

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\left(\varphi_2 - \varphi_1\right) = \frac{\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1}{1 + \operatorname{tg}\varphi_2 \cdot \operatorname{tg}\varphi_1} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}.$$

Для того щоб знайти гострий **кут між прямими**, розглядають модуль відношення, тобто

$$tg\,\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}\right|. \qquad (5.15)$$

Умова **паралельності прямих, заданих через кутовий коефіцієнт** випливає з умови, що паралельні прямі мають між собою кут 0, тобто $tg0 = 0$;

$$\boldsymbol{l}_1 \| \boldsymbol{l}_2 \text{ тоді і тільки тоді, коли } \boldsymbol{k}_1 = \boldsymbol{k}_2. \qquad (5.16)$$

Умова **перпендикулярності базується на тому, що** $tg\frac{\pi}{2} = \infty$;

$l_1 \perp l_2$ тоді і тільки тоді, коли $1 + \boldsymbol{k}_1 \cdot \boldsymbol{k}_2 = 0$ або

$$\boldsymbol{k}_1 = -\frac{1}{\boldsymbol{k}_2}. \qquad (5.17)$$

Канонічне рівняння прямої

Побудуємо ***рівняння прямої, яка проходить через точку*** $\boldsymbol{M_0(x_0, y_0)}$ ***паралельно вектору*** $\vec{\boldsymbol{a}} = (\boldsymbol{m; n})$. Візьмемо на нашій прямій довільну точку $M(x, y)$ і побудуємо вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$. Оскільки вектори $\overrightarrow{M_0M}$ та $\vec{a}$ паралельні, то їхні координати пропорційні, тобто

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}. \tag{5.18}$$

Точка $M(x, y)$ - довільна точка прямої, отже, рівняння (5.18) виконується для всіх точок прямої. Якщо точка $M(x, y)$ не лежить на прямій, тоді вектори $\overrightarrow{M_0M}$ та $\vec{a}$ не будуть паралельні, тобто рівняння (5.18) не виконується для точок, які лежать не на прямій.

Умови побудови рівняння лінії виконані, тобто (5.18) – рівняння прямої. Такий вигляд рівняння прямої називається **канонічним**. Вектор $\vec{\boldsymbol{a}} = (\boldsymbol{m; n})$ **називається напрямним вектором прямої**.

Якщо дві прямі задані канонічними рівняннями $\frac{x - x_{01}}{m_1} = \frac{y - y_{01}}{n_1}$ та $\frac{x - x_{02}}{m_2} = \frac{y - y_{02}}{n_2}$, то відносини між прямими можна аналізувати, використовуючи їхні напрямні вектори $\vec{\boldsymbol{a}}_1 = (\boldsymbol{m_1; n_1})$ та $\vec{\boldsymbol{a}}_2 = (\boldsymbol{m_2; n_2})$:

– умова паралельності цих прямих буде мати вигляд: $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$;

– умова ортогональності - $m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 = 0$;

– косинус кута між прямими знаходять за формулою

$$\cos\varphi = \frac{m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2}}.$$

Якщо в (5.18) коефіцієнт пропорційності позначити через параметр $\boldsymbol{t}$, тобто

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=t,$$

можна отримати ще один вид рівняння прямої – параметричний:

$$\begin{cases} x=tm+x_0, \\ y=tn+y_0. \end{cases} \tag{5.19}$$

Рівняння прямої, яка проходить через дві точки $M_1(x_1;y_1)$ та $M_2(x_2;y_2)$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \tag{5.20}$$

Приклад

Відомі координати вершин трикутника $A(-2;-1)$, $B(3;0)$ і $C(1;3)$. Знайти

1) точку перетину висот трикутника;

2) точку перетину медіан;

3) величину кута A;

4) рівняння прямої l_1, яка проведена через вершину C паралельно стороні AB.

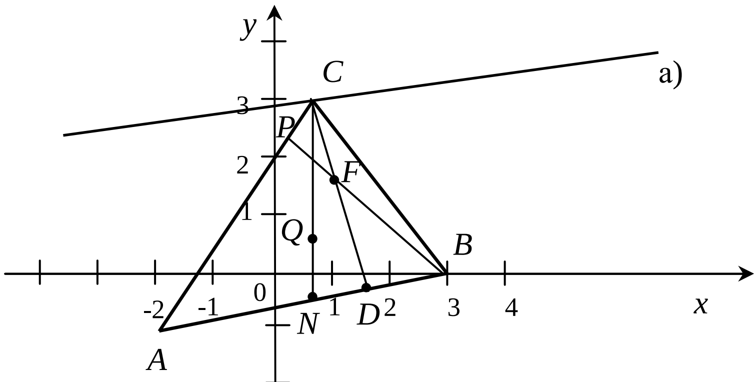


Рисунок 16

Розв'язання

1) Відомо, що всі три висоти трикутника перетинаються в одній точці. Тому для знаходження точки їх перетину F достатньо знати рівняння двох висот. Наприклад, CD та BP.

Побудуємо рівняння CD. Точка C лежить на цій прямій і має координати (1,3). Сторона трикутника AB перпендикулярна висоті CD. Якщо вектор $\overrightarrow{AB}$ взяти за нормаль CD, то згідно з (5.4) можна записати рівняння прямої, що проходить через точку C перпендикулярно $\overrightarrow{AB}$. Вектор $\overrightarrow{AB}$ визначимо через координати

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) = (3+2,\ 0+1) = (5,1).$$

Отже, для шуканого рівняння прямої $A = 5$, $B = 1$. Рівняння CD **у загальному вигляді** запишеться так

$A(x - x_c) + B(y - y_c) = 0$, або $5(x-1) + 1(y-3) = 0$.

Розкриємо дужки і отримаємо загальне рівняння висоти CD: $5x + y - 8 = 0$.

Аналогічно знаходимо рівняння висоти BP.

Точка B має координати $(3;0)$. Вектором, ортогональним до BP буде вектор $\overrightarrow{AC} = (x_c - x_A, y_c - y_A) = (1+2,\ 3+1) = (3,4)$.

Рівняння BP: $3(x-3) + 4(y-0) = 0$, або $3x + 4y - 9 = 0$.

Точка F – це точка перетину висот, а її координати є розв'язком системи рівнянь

$$\begin{cases} y = -5x + 8 \\ y = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{9}{4} \end{cases}, \quad \begin{cases} y = -5x + 8 \\ -5x + 8 = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{9}{4} \end{cases},$$

$$\begin{cases} y = -5x + 8, \\ -20x + 32 = -3x + 9 \end{cases}, \quad \begin{cases} y = -5x + 8 \\ 17x = 23 \end{cases},$$

$$\begin{cases} y = -5\cdot\dfrac{23}{17} + 8 = -\dfrac{115+136}{17} = \dfrac{21}{17}, \\ x = \dfrac{23}{17} \end{cases},$$

отже, $F\left(\dfrac{23}{17};\dfrac{21}{17}\right)$.

2) Щоб знайти координати точку перетину медіан, згадаємо, що вона ділить довільну медіану (в тому числі і медіану CN) у відношенні

$$\frac{CQ}{QN} = \frac{2}{1} = 2 = k\ .$$

Для визначення координат точки Q використаємо формули (5.3) ділення відрізку у заданому відношенні. Для використання цих формул нам потрібні координати точок C та N . Координати C відомі: $C = (1,\ 3)$. Точка N за визначенням медіани ділить сторону AB навпіл, тобто $\dfrac{AN}{NB} = \dfrac{1}{1} = 1 = k_1$, отже, її координати теж можна знайти за формулами (5.3)

$$x_N = \frac{x_A + k_1\cdot x_B}{1+k_1} = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2}\ ,$$

$$y_N = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0-1}{2} = -\frac{1}{2}\ .$$

Отримали, що точка N має координати $N\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$.

Тепер знайдемо координати точки Q. Коефіцієнт пропорційності для відрізків CQ і QN - k=2. Отже,

$$x_Q = \frac{x_C + kx_N}{1+k} = \frac{x_C + 2x_N}{1+2} = \frac{1+2\cdot\dfrac{1}{2}}{3} = \frac{2}{3},$$

$$y_Q = \frac{y_C + ky_N}{1+k} = \frac{y_C + 2y_N}{1+2} = \frac{3 + 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{3} = \frac{3-1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Отже, отримали координати точки перетину висот $Q\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$.

3) Кут A знайдемо з використанням скалярного добутку векторів $\overrightarrow{AB} = (5,1)$ та $\overrightarrow{AC} = (3,4)$. З формули (4.6) можна записати

$$\cos A = \frac{\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{5\cdot 3 + 1\cdot 4}{\sqrt{25+1}\sqrt{9+16}} = \frac{19}{5\sqrt{26}},$$

$\cos A > 0$, тобто A – гострий кут;

$$A = \arccos\frac{19}{5\sqrt{26}}.$$

4) Рівняння прямої l_1 запишемо, використовуючи (5.18) як рівняння прямої, що проходить через відому точку $C = (1,\,3)$ паралельно AB. Спочатку запишемо рівняння AB, використавши (5.20) – рівняння прямої, що проходить крізь 2 точки (точки $A(-2,\,-1)$ і $A(3,\,0)B(3{,}0)$)

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}, \text{ або } \frac{x-2}{3+2} = \frac{y+1}{0+1}.$$

Остаточно рівняння AB має вигляд $\frac{x-2}{5} = \frac{y+1}{1}$.

Це канонічне рівняння з напрямним вектором $\vec{a} = (5,\,1)$. Пряма l_1 паралельна прямій AB, отже, вона має той самий напрямний вектор. Запишемо канонічне рівняння прямої l_1, яка проходить через точку C паралельно AB. Згідно з (5.18)

$$\frac{x - x_c}{5} = \frac{y - y_c}{1}, \text{ або } \frac{x-1}{5} = \frac{y-3}{1}.$$

Виконаємо перетворення і зведемо отримане рівняння до рівняння з кутовим коефіцієнтом

$\frac{1}{5}x-\frac{1}{5}=y-3$, $y=\frac{1}{5}x-\frac{1}{5}+3$, $y=\frac{1}{5}x+2\frac{4}{5}$, або

$y=0{,}2x+2{,}8$ – рівняння прямої l_1.

5.2.3 КАНОНІЧНІ РІВНЯННЯ КРИВИХ ЛІНІЙ ДРУГОГО ПОРЯДКУ. ЗВЕДЕННЯ КРИВИХ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ДО КАНОНІЧНОГО ВИГЛЯДУ

Кривими лініями другого порядку називаються лінії, координати точок яких задовольняють рівнянням другого степеня відносно змінних x і y.

До таких ліній відносяться коло, еліпс, гіпербола та парабола.

а) Коло

Означення 1

Коло – це геометричне місце точок, рівновіддалених від фіксованої точки, яка називається центром кола.

Отримаємо рівняння кола.

Позначимо $C(x_0,y_0)$ центр кола радіуса R. Візьмемо довільну точку $M(x,y)$ на колі (рисунок 17).

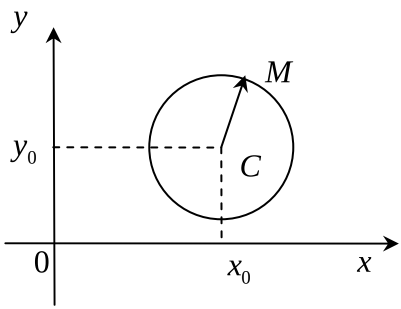


Рисунок 17

Тоді за умовою, що накладена на точки лінії $\left|\overrightarrow{CM}\right|=R$.

Можемо знайти координати CM

$\overrightarrow{CM} = (x - x_0, y - y_0)$.

Тоді за (5.1) знаходимо довжину вектора: $\left|\overrightarrow{CM}\right| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$,або $R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$. Піднесемо обидві частини до квадрату і отримаємо

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 . \qquad (5.21)$$

Рівняння (5.21) має назву **канонічне рівняння кола**.

Якщо центр кола знаходиться в точці $O(0, 0)$, то рівняння кола спрощується і набуває вигляду

$$x^2 + y^2 = R^2 . \qquad (5.22)$$

Приклад 1

Побудувати лінію, рівняння якої

$$x^2 + 4x + y^2 - 8y = 0 .$$

Для того щоб побудувати криву, необхідно рівняння записати у канонічному вигляді (5.21). Для цього виділимо повний квадрат для змінної x та змінної y

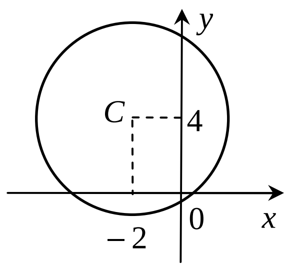
$$x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x + 4 - 4 + y^2 - 2 \cdot 4 \cdot y + 16 - 16 = 0 ,$$

$$(x + 2)^2 - 4 + (y - 4)^2 - 16 = 0 ,$$

$$(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 20 .$$

Отже, отримали канонічне рівняння кола з центром у точці $C = (-2, 4)$ і радіусом $R = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

Побудуємо шукану криву лінію.



б) Еліпс

Означення 2

Еліпсом називається геометричне місце точок, сума відстаней яких до двох фіксованих точок (фокусів) є стала величина 2а.

Побудуємо рівняння еліпса. Виберемо на осі OX дві фіксовані точки F_1 та F_2 – фокуси майбутнього еліпса. Вісь OY ділить відрізок F_1F_2 навпіл (рисунок 18).

Позначимо відстань між фокусами $2c$. Тоді точка F_1 визначається координатами $(-c,\ 0)$, а F_2 – $(c,\ 0)$.

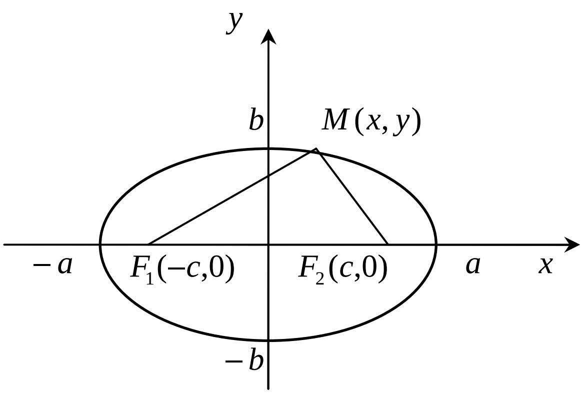


Рисунок 18

Візьмемо на еліпсі довільну точку $M(x, y)$. За означенням еліпса маємо

$$|F_1M| + |F_2M| = 2a\,. \qquad (*)$$

Знайдемо відстані від фокусів до точки M

$$|F_1M| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\,,\ |F_2M| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\,.$$

Підставимо відстані до умови (*)

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a\,.$$

Спростимо це рівняння.

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2=\left(2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2,$$

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2,$$

$$(x+c)^2+y^2-(x-c)^2-y^2-4a^2=-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Розкриємо квадрати і приведемо подібні члени. Потім ще раз піднесемо до квадрата.

$$\left(xc-a^2\right)^2=\left(-a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2,$$

$$x^2c^2-2xca^2+a^4=a^2\left((x-c)^2+y^2\right),$$

$$x^2c^2-2xca^2+a^4=a^2x^2-2xca^2+a^2c^2+a^2y^2,$$

$$x^2c^2+a^4=a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2;$$

$$x^2\left(a^2-c^2\right)+a^2y^2=a^2\left(a^2-c^2\right).$$

За умовою $a\neq 0$, бо інакше не було б відстані між точками. З рисунка 18 видно, що $a>c$, тобто $\left(a^2-c^2\right)>0$, отже, можна ліву і праву частини останньої рівності поділити на вираз $a^2\left(a^2-c^2\right)$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\left(a^2-c^2\right)}=1.$$

Позначимо $\left(a^2-c^2\right)=b^2$, отримаємо **канонічне рівняння еліпса**

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (5.23)$$

З центром у точці (0,0)

a називають ***X*-ою піввіссю еліпса**, вона дорівнює відстані від точки $O(0,\ 0)$ до найдальшої точки еліпса вздовж осі OX .

b називають ***Y*-ою піввіссю еліпса**, і дорівнює вона відстані від точки $O(0,\ 0)$ до найдальшої точки еліпса вздовж осі OY .

Відношення $\varepsilon = \frac{c}{a} < 1$ називають **ексцентриситетом** еліпса.

У випадку, коли центр еліпса знаходиться в точці (α, β), рівняння набуває вигляду

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1. \qquad (5.24)$$

Приклад 2

Записати рівняння і побудувати лінію, кожна точка якої розміщена вдвічі ближче до точки $A(2;1)$, ніж до прямої $x = -2$.

Розв'язання

Спочатку виконаємо схематичний рисунок (рисунок 19).

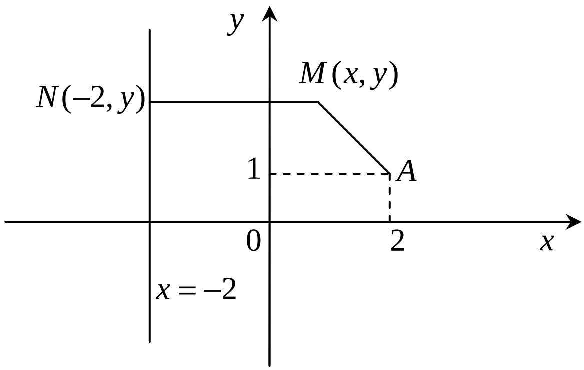


Рисунок 19

Візьмемо довільну точку $M(x, y)$ і будемо вважати, що вона належить шуканій лінії. MA – відстань від $M(x, y)$ до $A(2;1)$. Точка $N(-2, y)$ – точка перетину перпендикуляра, який опущений з точки $M(x, y)$ на пряму $x = -2$, тобто MN – відстань від $M(x, y)$ до прямої $x = -2$. Складемо рівняння, що задовольняє умові задачі

$$MN = 2MA. \qquad (*)$$

Відстань між двома точками знаходимо за (5.1)

$$MN=\sqrt{\left(x-(-2)\right)^2+\left(y-y\right)^2}=\sqrt{\left(x+2\right)^2+0}=\left(x+2\right),$$

$$MA=\sqrt{\left(x-2\right)^2+\left(y-1\right)^2}\ .$$

Підставляємо отримані вирази для відстаней у (*)

$$\left(x+2\right)=2\sqrt{\left(x-2\right)^2+\left(y-1\right)^2}\ . \qquad (**)$$

Отримане рівняння – рівняння шуканої лінії. Всі точки лінії задовольняють рівняння через його побудову. Точки, які не належать лінії не задовольняють отримане рівняння.

Для того, щоб легше було визначити тип лінії, зробимо перетворення рівняння, **зведемо його до канонічного вигляду**. Для цього (**) піднесемо до квадрата:

$$\left(x+2\right)^2=4\left(\left(x-2\right)^2+\left(y-1\right)^2\right),$$

$$x^2+4x+4=4\left(x^2-4x+4\right)+4\left(y-1\right)^2\ ,$$

$$4x^2-16x+16-x^2-4x-4+4\left(y-1\right)^2=0\ ,$$

$$3x^2-20x+12+4\left(y-1\right)^2=0\ ,$$

$$3\left(x-2\cdot\frac{10}{3}x+\left(\frac{10}{3}\right)^2-\left(\frac{10}{3}\right)^2\right)+12+4\left(y-1\right)^2=0\ ,$$

$$3\left(x-\frac{10}{3}\right)^2-\frac{100}{3}+12+4\left(y-1\right)^2=0\ ,$$

$$3\left(x-\frac{10}{3}\right)^2+4\left(y-1\right)^2=\frac{64}{3}\left|\left(:\frac{64}{3}\right)\right.,$$

$$\frac{3\left(x-\frac{10}{3}\right)^2}{\frac{64}{3}}+\frac{4\left(y-1\right)^2}{\frac{64}{3}}=1\ ,$$

$$\frac{\left(x-10/3\right)^2}{\frac{64}{9}}+\frac{\left(y-1\right)^2}{\frac{16}{4}}=1\ .$$

Отримали канонічне рівняння еліпса.

Висновок

Поставленій у задачі умові відповідає рівняння еліпса з центром у точці $O_1\left(\frac{10}{3};1\right)$, X-ою піввіссю $a=\frac{8}{3}\approx 2,67$ і Y-ою піввіссю $b=\frac{4}{\sqrt{3}}\approx 2,3$.

Побудуємо цю криву

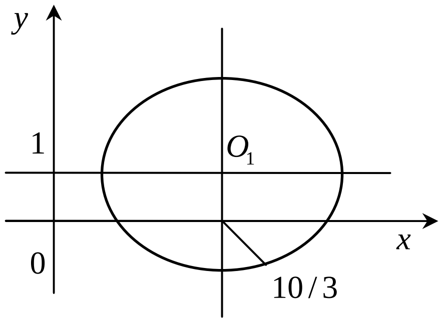


Рисунок 20

с) Гіпербола

Означення 3

Гіпербола – це геометричне місце точок, абсолютна величина різниці відстаней кожної з яких до двох фіксованих точок (фокусів) є стала величина 2а.

Аналогічно з виведенням рівняння еліпса задамо довільну точку $M(x,y)$ на шуканій кривій і фокуси з координатами $F_1(-c;0)$ і $F_2(c;0)$. За означенням гіперболи маємо

$$\left\| F_1M \right| - \left| F_2M \right\| = 2a$$

отже, якщо розкрити модуль, будемо мати

$$\left| F_1M \right| - \left| F_2M \right| = \pm 2a .$$

Підставивши відстані, аналогічно з рівнянням еліпса, отримаємо

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a\,.$$

Після перетворень отримаємо рівняння

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{(a^2-c^2)}=1.$$

Оскільки у гіперболи $c^2>a^2$, тому через b^2 позначимо вираз $b^2=c^2-a^2$, тоді канонічним рівнянням гіперболи буде таке

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (5.25)$$

Величина a – дійсна піввісь; b – уявна піввісь; $2c$ - відстань між фокусами гіперболи F_1 та F_2. Для гіперболи (5.25) виконуються умови

$$c^2=a^2+b^2,\;\; \varepsilon=\frac{c}{a}>1.$$

Прямі $y=\pm\frac{b}{a}x$ називаються ***асимптотами гіперболи*** (якщо точка на гіперболі віддаляється від початку координат, то відстань від цієї точки до однієї з асимптот наближається до нуля). Вершини гіперболи лежать в точках $A_1(-a;0)$ і $A_2(a;\,0)$ (див. рисунок 21).

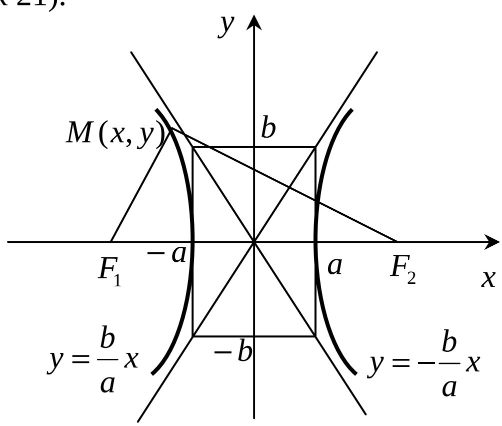


Рисунок 21

Якщо фокуси гіперболи розмістити в точках $F_1(0;-c)$ та $F_2(0;c)$, а різницю відстаней подати, як $\left\| F_1M \right| - \left| F_2M \right\| = 2b$, то рівняння набуває вигляду

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1. \tag{5.26}$$

Причому тепер дійсна піввісь – це b, уявна піввісь – a; вершини гіперболи знаходяться в точках $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$, і гіпербола має вигляд

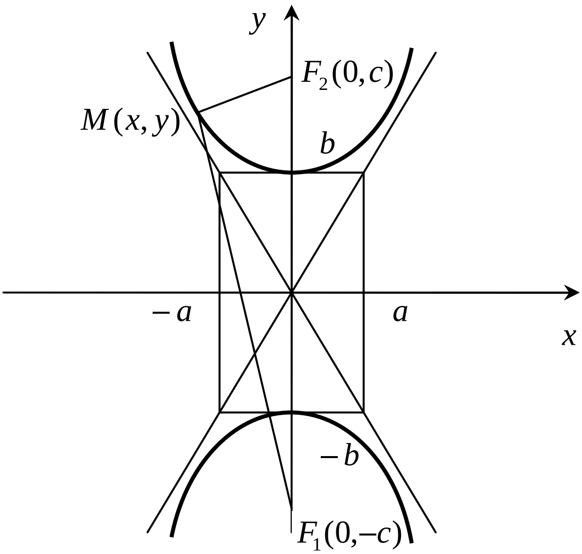


Рисунок 22

Асимптоти задаються також рівняннями $y = \pm \frac{b}{a} x$.

Якщо центр гіперболи знаходиться в точці $O_1(\alpha;\beta)$, то рівняння гіперболи має вигляд

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1, \tag{5.27}$$

або

$$\frac{(y-\beta)^2}{b^2}-\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}=1\,. \qquad (5.28)$$

Приклад 3

Записати рівняння і побудувати криву, кожна точка якої розміщена вдвічі ближче до прямої $y=1$, ніж до точки $A(1:-2)$.

Розв'язання

Спочатку виконаємо схематичний рисунок.

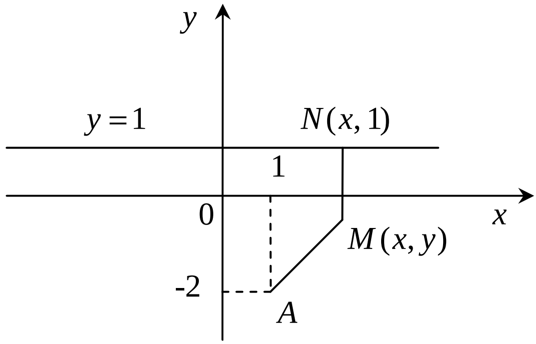


Рисунок 23

Якщо $M(x;y)$ – довільна точка шуканої лінії, то за умовою задачі

$$2MN = MA\,. \qquad (*)$$

Відстань між двома точками знаходиться за формулою (5.1). Отже,

$$MA=\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}\,,$$

$$MN=\sqrt{(x-x)^2+(y-1)^2}\,.$$

Підставляємо в (*)

$$2\sqrt{0+(y-1)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}\,. \qquad (**)$$

Отримане рівняння є рівнянням шуканої лінії, але щоб криву класифікувати і побудувати, необхідно звести його до канонічного вигляду.

Спочатку піднесемо до квадрату (**)

$$4(y-1)^2=(x-1)^2+(y+2)^2.$$

Тепер перенесемо в одну частину рівняння і згрупуємо:

$$4\left(y^2-2y+1\right)-(x-1)^2-\left(y^2+4y+4\right)=0,$$

$$4y^2-8y+4-(x-1)^2-y^2-4y-4=0,$$

$$3y^2-12y-(x-1)^2=0,$$

$$3\left(y^2-4y+4-4\right)-(x-1)^2=0,$$

$$3(y-2)^2-12-(x-1)^2=0,$$

$$3(y-2)^2-(x-1)^2=12\,\big|\,(:12).$$

Отримали рівняння

$$\frac{(y-2)^2}{4}-\frac{(x-1)^2}{12}=1.$$

Отже, це канонічне рівняння гіперболи з дійсною піввіссю $b=2$; уявною піввіссю $a=\sqrt{12}$; центром у точці $O_1(1;\,2)$.

Побудуємо отриману криву лінію (рисунок 24).

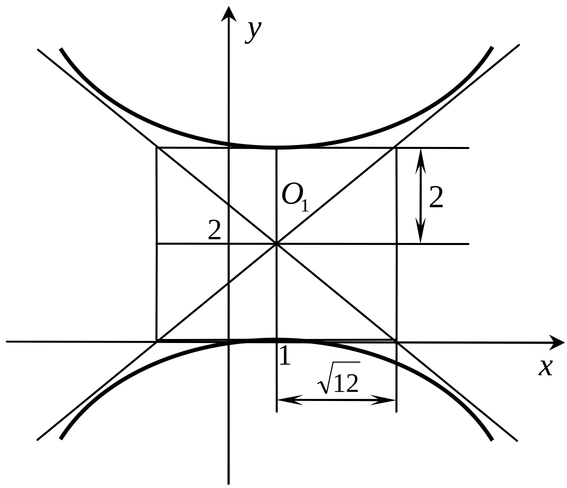


Рисунок 24

d) Парабола

Означення 4

Парабола – це геометричне місце точок, відстані яких до заданої прямої (директриси) і до заданої точки (фокуса) рівні.

Для побудови рівняння параболи розглянемо рисунок 25. Візьмемо довільну точку $M(x,y)$. Позначимо фокус параболи точкою $F\left(\frac{p}{2};0\right)$, а директрису прямою $x=-\frac{p}{2}$. MN – перпендикуляр, що опущений з точки $M(x,y)$ на директрису $x=-\frac{p}{2}$. Точка N має координати $N\left(-\frac{p}{2};y\right)$. Відстань до фокуса буде довжина відрізка MF, а відстань між точкою $M(x,y)$ та директрисою буде довжина відрізка MN. Тоді умова, що накладається на точки параболи, буде мати вигляд

$$|MF|=|MN|, \text{ або } x+\frac{p}{2}=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}.$$

Якщо піднести отримане рівняння до квадрата і зробити перетворення, отримаємо рівняння

$$y^2=2px. \qquad (5.29)$$

Область визначення такої кривої $x\in[0,\infty)$, область значень – $y\in(-\infty,\infty)$. Вершина параболи знаходиться на початку координат.

Якщо $p>0$, то крива має гілки, які направлені вздовж осі OX в напрямі $+\infty$ (рис. 25 а). Якщо ж $p<0$, то крива має гілки, які направлені вздовж осі OX в напрямі $-\infty$ (рисунок 25 б)

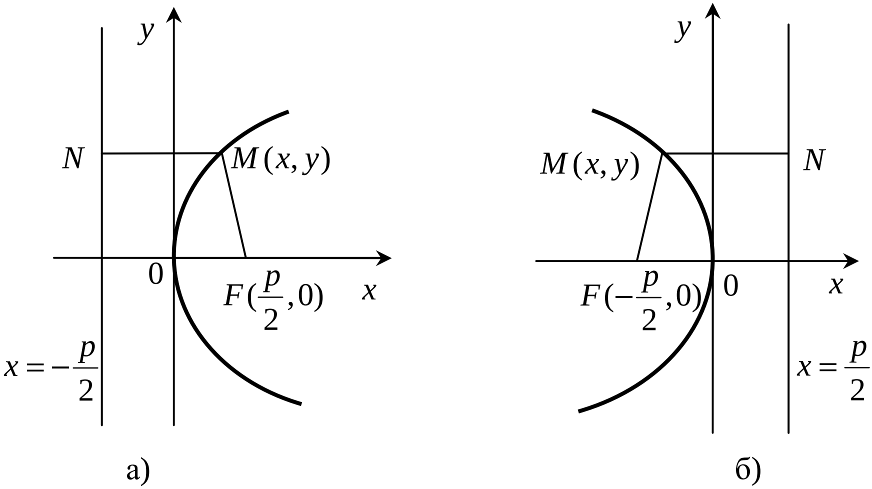


Рисунок 25

Якщо за фокус взяти точку $F(0; p/2)$, а за директрису – пряму $y=-p/2$, то рівняння параболи набуває вигляду (рисунок 26)

$$x^2 = 2py. \tag{5.30}$$

Область визначення такої кривої $y \in [0, \infty)$, область значень - $x \in (-\infty, \infty)$. Вершина параболи знаходиться теж в точці $O(0;0)$.

У цьому випадку, якщо $p > 0$, то гілки параболи направлені вгору (рисунок 26 а), якщо ж $p < 0$, то гілки направлені униз (рисунок 26 б)

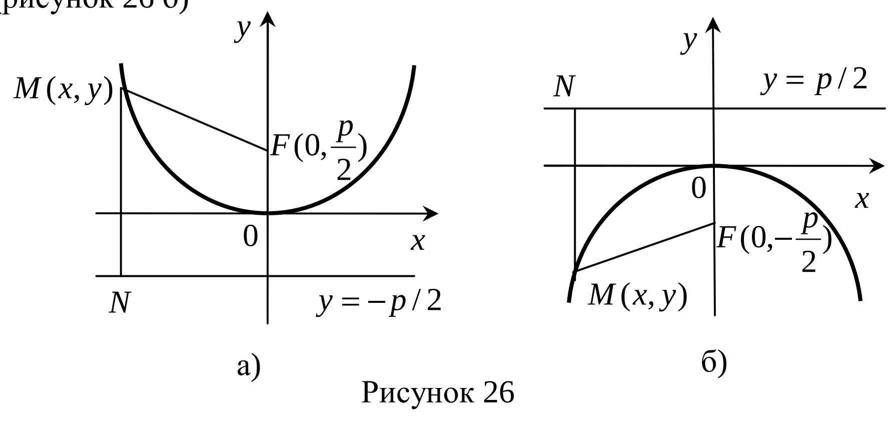


Рисунок 26

У випадку, коли вершина параболи знаходиться у точці $O_1(\alpha;\beta)$, її рівняння має вигляд

$$(y-\beta)^2 = 2p(x-\alpha), \tag{5.31}$$

або

$$(x-\alpha)^2 = 2p(y-\beta). \tag{5.32}$$

Приклад 4

Записати рівняння і побудувати криву, кожна точка якої рівновіддалена від прямої $x = 2$ і точки $A(-1;2)$.

Розв'язання

Виконаємо схематичний рисунок (рисунок 27).

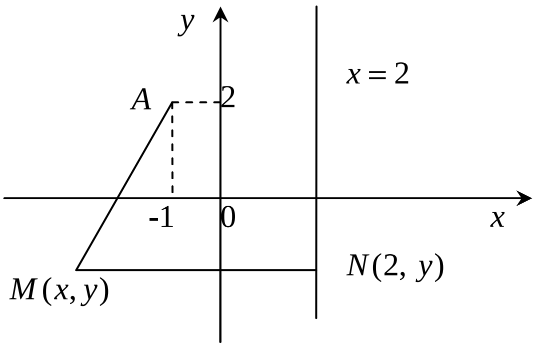


Рисунок 27

Якщо $M(x, y)$ – довільна точка кривої, то за умовою задачі відстані

$$MN = MA. \tag{*}$$

Використовуючи формулу (5.1), знаходимо

$$MN = \sqrt{(x-2)^2 + (y-y)^2},$$

$$MA = \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2}.$$

Підставимо в (*) і отримуємо рівняння, яке відповідає умові задачі

$$\sqrt{(x-2)^2+0}=\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}\ .$$

Для того, щоб класифікувати криву і побудувати її, необхідно рівняння (*) звести до канонічного вигляду.

Піднесемо рівняння до квадрату та виконаємо необхідні еквівалентні перетворення. Одержимо

$$(x-2)^2=(x+1)^2+(y-2)^2,$$

$$x^2-4x+4-\left(x^2+2x+1\right)=(y-2)^2,$$

$$x^2-4x+4-x^2-2x-1=(y-2)^2,$$

$$-6x+3=(y-2)^2.$$

У результаті отримаємо рівняння

$$-6\left(x-\frac{1}{2}\right)=(y-2)^2\ .$$

Тепер можемо сказати, що це парабола. Її вершина знаходиться в точці $O_1\left(\frac{1}{2};2\right)$, $2p=-6$ отже, $p=-3$. Оскільки $p<0$, то гілки параболи направлені вліво.

Для більш точної побудови графіка кривої знаходимо точки перетину з осями координат.

При $x=0$ $(y-2)^2=3$, $y-2=\pm\sqrt{3}$, $y=2\pm\sqrt{3}$.

Отже, вісь OY парабола перетинає в двох точках

$y_1=2-\sqrt{3}\approx 0.3$ і $y_2=2+\sqrt{3}\approx 3.7$.

При $y=0$

$$-6x+3=(0-2)^2,\ -6x=4-3,\ -6x=1,\ x=-\frac{1}{6}.$$

Отже, вісь OX парабола перетинає в точці $x=-\dfrac{1}{6}$.

Побудуємо отриману параболу

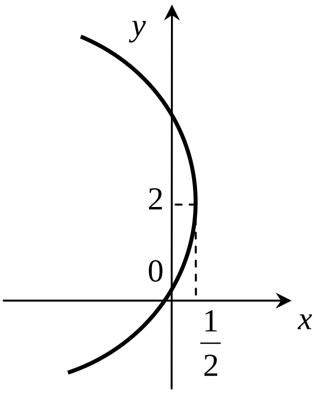


Рисунок 28

5.2.4 Загальне рівняння ліній другого порядку в просторі $\boldsymbol{R}^2$

Загальне рівняння лінії другого порядку на площині має вигляд

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \qquad (5.33)$$

Частина $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ називається **квадратичною частиною рівняння**, частина $2Dx + 2Ey$ називається **лінійною частиною рівняння**, F – вільний член рівняння.

Лінія другого порядку на площині не змінює свого типу переходом з базису до базису і має три характеристики, за допомогою яких можна визначити тип лінії в будь якому базисі. Ці характеристики називаються **інваріантами** кривої.

Першим інваріантом рівняння лінії другого порядку є визначник третього порядку, який побудований з коефіцієнтів всього рівняння

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}.$$

Це визначник симетричної матриці. Називається цей визначник **великим детермінантом**. Він не змінює свого значення при перетворенні рівняння з базису до базису і несе такий зміст.

Якщо $\Delta \neq 0$, то рівняння описує невироджену криву другого порядку – **еліпс, гіперболу або параболу**.

Якщо ж $\Delta = 0$, то маємо рівняння виродженої лінії – **пара схрещених або паралельних прямих, або взагалі пуста множина**.

Другим інваріантом рівняння є так званий малий визначник

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}.$$

Цей визначник входить у великий діагональним мінором другого порядку.

Розглянемо випадок, коли перший інваріант $\Delta \neq 0$.

Для дослідження властивостей 2-го інваріанта δ розглянемо квадратичну частину рівняння. Цю частину можна розглянути як квадратичну форму $L(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$.

З попереднього матеріалу ми знаємо, що квадратична форма може бути подана матрицею квадратичної форми, яка дії на вектор змінних. Запишемо для нашої квадратичної частини матрицю

$$S_L = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}.$$

З теорії квадратичних форм нам відомо, що

- матриця квадратичної форми є не виродженою, тобто $\det L \neq 0$;
- характеристичний поліном $\left| S_L - kE \right| = 0$ не залежить від базису;
- квадратична форма в ортонормованому базисі з власних векторів набуває діагонального вигляду з власними числами на діагоналі;
- сигнатура квадратичної форми є її інваріантом.

Опираючись на ці властивості квадратичних форм, можна стверджувати:

- **якщо для деякої лінії** $\det S_L \neq 0$, то існує базис, в якому квадратична частина загального рівняння має вигляд: $k_1 x'^2 \pm k_2 y'^2$, де x', y' - координати точок лінії в новому базисі, складеному з ортонормованих власних векторів, k_1, k_2 - **власні числа квадратичної форми**. Якщо порівняти такий вигляд квадратичної частини лінії з канонічними рівняннями, то можна помітити, що перетворений вигляд лінії – канонічний вигляд центральних кривих – **ліній еліптичного або гіперболічного типу;**

- **якщо ж** $\det S_L = 0$, то маємо вироджену квадратичну форму, тобто дана крива нецентральна лінія. Серед невироджених кривих другого порядку є одна така лінія – **парабола.**

Отже, підсумовуючи, можна зробити висновок.

У випадку, коли 1-й інваріант $\Delta \neq 0$, маємо

якщо $\delta > 0$ - рівняння еліпса. Канонічне рівняння еліпса

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, якщо $a = b$, маємо коло.

$\delta < 0$ - рівняння гіперболи. Канонічне рівняння гіперболи

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, або $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

$\delta = 0$ - рівняння параболи. Канонічне рівняння параболи

$y^2 = 2px$, або $x^2 = 2py$.

У випадку, коли 1-й інваріант $\Delta = 0$, маємо вироджені лінії

- **якщо** $\delta > 0$ - рівняння пари „уявних” прямих, що перетинаються. Фактично це рівняння точки. Канонічний вигляд

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$.

$\delta < 0$ - рівняння **пари прямих, що перетинаються**. Канонічний вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

$\delta = 0$ - рівняння **пари паралельних прямих**. Канонічний вигляд

$y^2 = a^2$ - **пара паралельних прямих**;

$y^2 = -a^2$ - **пара „уявних" паралельних прямих**, $\{\varnothing\}$;

$y^2 = 0$ - **пара прямих, що співпали**.

Третім інваріантом рівняння є **слід матриці**, тобто якщо розглядати матрицю

$S = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$, то інваріантною буде величина $tr = A + B$.

5.2.5 Загальний алгоритм зведення кривої другого порядку до канонічного вигляду

Звести загальне рівняння лінії другого порядку до канонічного вигляду це означає виконати 2 кроки.

1. Повернути канонічну систему координат на кут, який осі поточної системи координат створюють з канонічною системою. Цим кроком ми позбавляємося від доданків, які являють собою змішані добутки координат, тобто доданків типу $2Bxy$.

2. Змістити центр канонічної системи координат. Цим кроком ми позбавляємося лінійної частини рівняння, тобто частини $2Dx + 2Ey$.

Є декілька методів зведення рівняння до канонічного вигляду. Ми розглянемо алгоритм з застосуванням теорії квадратичних форм.

Отже, нехай дано загальне рівняння лінії другого порядку

$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$.

Алгоритм дослідження рівняння, зведення його до канонічного вигляду і побудови лінії.

1. Визначити тип лінії.

Для цього необхідно обчислити 1-й і 2-й інваріанти і визначити тип кривої за наведеними вище ознаками.

2. Повернути систему координат.

Для цього необхідно виконати такі дії.

а) виписати квадратичну частину рівняння, як квадратичну форму

$L(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$.

Записати матрицю квадратичної форми L

$$S_L = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix};$$

б) знайти власні числа k_1, k_2 даної квадратичної форми. Для цього розв'язати рівняння $|S_L - kE| = 0$;

в) знайти власні вектори для даної матриці квадратичної форми і побудувати ортонормований базис

$U = (G_1; G_2)$, $(G_1 \cdot G_2) = 0$, $\|G_1\| = \|G_2\| = 1$.

Цей базис і буде канонічним для даної квадратичної форми.

г) виписати формули перетворення координат з поточного базису у канонічний: якщо $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ координати точки в поточному базисі, а $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ - координати тієї ж точки в канонічному базисі, то згідно формулам перетворення координат від базису до базису:

$$X = UX'; \qquad (*)$$

д) зробити у вихідному рівнянні лінії перетворення:

– квадратичну частину замінити на канонічний вигляд:

$k_1x'^2 \pm k_2y'^2$;

– лінійній частині змінні x, y виразити відповідно (*) через x', y';

– привести подібні члени.

3. Перемістити центр системи координат.

Для цього

- виділити повні квадрати для змінних x', y';

- записати остаточний вигляд канонічного рівняння.

4. Перевірити, чи співпав отриманий тип лінії з тим, що визначили за інваріантами.

5. Побудувати криву лінію.

- Побудувати нормальну декартову систему координат в R2. Вказати базисні орти.

- У нормальній декартовій системі координат побудувати ортонормований базис, що складається з власних векторів: $U = (G_1; G_2)$, $(G_1 \cdot G_2) = 0$, $\|G_1\| = \|G_2\| = 1$. Нові осі позначити Ox' та Oy'.

- Побудувати в канонічній системі криву відповідно до канонічного рівняння.

Приклад

Дослідити загальне рівняння лінії другого порядку. Звести його до канонічного вигляду. Побудувати лінію

$$2x^2 - 4xy + 5y^2 - 2x + 6y - 4 = 0.$$

Розв'язання

1) Обчислимо 1-й і 2-й інваріанти

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -40 + 6 + 6 - 5 - 18 + 16 = -35 \neq 0,$$

отже, маємо рівняння невиродженої лінії.

$$\delta = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 4 = 6 > 0,$$

отже, вихідне рівняння є рівнянням еліпса.

2) Зробимо поворот системи координат, спираючись на теорію власних чисел:

а) Розглянемо квадратичну частину рівняння і випишемо квадратичну форму $L = 2x^2 - 4xy + 5y^2$;

матрицею форми буде матриця $S_L = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

б) Побудуємо та розв'яжемо характеристичне рівняння

$$|S_L - kE| = \begin{vmatrix} 2-k & -2 \\ -2 & 5-k \end{vmatrix} = (2-k)(5-k) - 4 = k^2 - 7k + 6 = 0,$$

$$k_{1,2} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 6} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{7}{2} \pm \frac{5}{2}.$$

Знайшли власні числа: $k_1 = 1; \quad k_2 = 6$.

в) Знайдемо власні вектори

1) $k_1 = 1$; відповідна система $(S_L - k_1 E)X = 0$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0; \quad \tilde{S} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Отримали розв'язок $x_1 = 2x_2$, $x_2 = C$, $X^{(1)} = \begin{pmatrix} 2C \\ C \end{pmatrix}$.

Нормуємо вектор $\left\|X^{(1)}\right\| = \sqrt{4C^2 + C^2} = C\sqrt{5}$, $G^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2) $k_2 = 6$; відповідна система $(S_L - k_2 E)X = 0$.

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0; \quad \tilde{S} = \left(\begin{array}{cc|c} -4 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Отримали розв'язок $x_2 = -2x_1$, $x_1 = C$, $X^{(2)} = \begin{pmatrix} C \\ -2C \end{pmatrix}$.

Нормуємо вектор $\left\| X^{(2)} \right\| = \sqrt{4C^2 + C^2} = C\sqrt{5}$,

$G^{(21)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$U = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ – канонічний базис.

г) Виразимо координати квадратичної форми через координати в канонічному базисі

$$X = UX', \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2x' + y' \\ x' - 2y' \end{pmatrix}.$$

Отже, можна записати

$$x = \frac{2}{\sqrt{5}} x' + \frac{1}{\sqrt{5}} y', \; y = \frac{1}{\sqrt{5}} x' - \frac{2}{\sqrt{5}} y'. \tag{*}$$

д) Зробимо в рівнянні $2x^2 - 4xy + 5y^2 - 2x + 6y - 4 = 0$ такі зміни: квадратичну частину замінимо на вигляд квадратичної форми у канонічному базисі $k_1 x' + k_2 y' = 1 \cdot x' + 6 \cdot y'$, а в лінійну частину підставимо вирази для x, y через координати канонічного базису x', y' (*).

Отримаємо

$$1 \cdot x'^2 + 6 \cdot y'^2 - 2\left(\frac{2}{\sqrt{5}} x' + \frac{1}{\sqrt{5}} y' \right) + 6\left(\frac{1}{\sqrt{5}} x' - \frac{2}{\sqrt{5}} y' \right) - 4 = 0.$$

Зробимо перетворення:

$$x'^2 + 6y'^2 - 2\frac{2}{\sqrt{5}} x' - 2\frac{1}{\sqrt{5}} y' + 6\frac{1}{\sqrt{5}} x' - 6\frac{2}{\sqrt{5}} y' - 4 = 0,$$

$$x'^2 + 6y'^2 - \frac{4-6}{\sqrt{5}} x' - \frac{2+12}{\sqrt{5}} y' - 4 = 0,$$

$$x'^2+6y'^2+\frac{2}{\sqrt{5}}x'-\frac{14}{\sqrt{5}}y'-4=0.$$

В останньому рівнянні вже немає мішаних доданків, отже систему координат повернули.

3) Перенесемо центр системи координат.

Виділимо повні квадрати для x', y'

$$\left(x'^2+2\frac{1}{\sqrt{5}}x'+\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2-\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2\right)+$$

$$+6\left(y'^2-2\frac{7}{6\sqrt{5}}y'+\left(\frac{7}{6\sqrt{5}}\right)^2-\left(\frac{7}{6\sqrt{5}}\right)^2\right)-4=0,$$

$$\left(x'^2+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2-\frac{1}{5}+6\left(y'^2-\frac{7}{6\sqrt{5}}\right)^2-6\frac{49}{36\cdot 5}-4=0,$$

$$\left(x'^2+0{,}45\right)^2+6\left(y'^2-0{,}52\right)^2-5{,}83=0,$$

$$\frac{\left(x'^2+0{,}45\right)^2}{5{,}83}+\frac{\left(y'^2-0{,}52\right)^2}{\frac{5{,}83}{6}}=1.$$

$$\frac{\left(x'^2+0{,}45\right)^2}{5{,}83}+\frac{\left(y'^2-0{,}52\right)^2}{0{,}97}=1$$ – отримали рівняння еліпса.

Центр канонічної системи координат знаходиться в точці $\alpha=-0{,}45;\ \ \beta=0{,}52$.

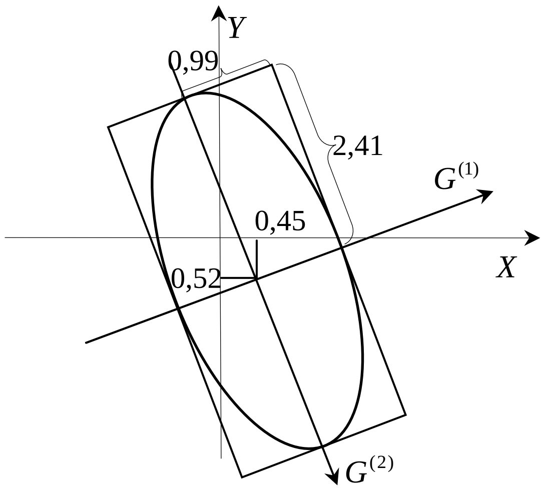
X -ва піввісь $a=\sqrt{5{,}83}\approx 2{,}41$.

Y -ва піввісь $b=\sqrt{0{,}97}\approx 0{,}985$.

4) Перевіримо тип кривої.

Згідно інваріантів вихідне рівняння кривої лінії є рівнянням еліпса. Після перетворення ми отримали канонічне рівняння еліпса. Отже, обчислення зроблені правильно.

5) Побудуємо криву.



5.3 Аналітична геометрія у просторі

5.3.1 Рівняння площини

а) Рівняння площини, яка проходить через дану точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ **перпендикулярно до даного вектора** $\vec{n}=(A;B;C)$.

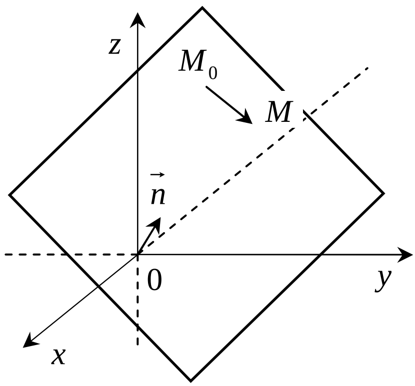


Рисунок 29

Введемо довільну точку шуканої площини $M(x;y;z)$. Розглянемо вектор $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0;y-y_0;z-z_0)$, який лежить у цій площині. За умовою задачі $\overrightarrow{M_0M}\perp\vec{n}$, а це означає, що скалярний добуток цих векторів дорівнює 0

$$\overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{n}=0. \qquad (5.33)$$

Отримали **нормальне рівняння** шуканої площини у векторній формі. В координатній формі **нормальне рівняння** набуває вигляду

$$\boldsymbol{A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0}. \qquad (5.34)$$

Якщо в (5.34) розкрити дужки і позначити $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$, отримаємо **загальне рівняння площини в просторі.**

$$\boldsymbol{Ax+By+Cz+D=0}. \qquad (5.35)$$

Проаналізуємо загальне рівняння (5.35). Якщо

1) $D=0$, тобто $Ax+By+Cz=0$ – маємо рівняння площини, яка проходить **через початок координат**, точку $O(0{,}0{,}0)$.

2) $C=0$, а $A\neq 0, B\neq 0, D\neq 0$, рівняння (5.35) набуває вигляду:

$Ax+By+D=0$ – це рівняння площини, яка **перпендикулярна до площини** zOx. Змінна z набуває довільного значення.

3) $B=0, C=0$, а $A\neq 0, D\neq 0$, тобто $Ax+D=0$ – це рівняння площини, яка **паралельна площині** $\boldsymbol{yOz}$**.** Змінні у та $\boldsymbol{z}$ набувають довільних значень.

4) $\boldsymbol{x=0}$ – рівняння **координатної площини** zOy;

$\boldsymbol{y=0}$ – рівняння **координатної площини** xOz;

$\boldsymbol{z=0}$ – рівняння **координатної площини** xOy.

б) Рівнянням площини у відрізках

Якщо в (5.35) $D\neq 0$, то загальне рівняння можна перетворити до вигляду

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}}+\frac{y}{-\frac{D}{B}}+\frac{z}{-\frac{D}{C}}=1.$$

Позначимо $-D/A=a, -D/B=b, -D/C=c$, отримали вигляд рівняння, що називається рівнянням площини у відрізках (рисунок 30).

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \tag{5.36}$$

де a,b,c – відрізки, які відтинає площина на осях координат.

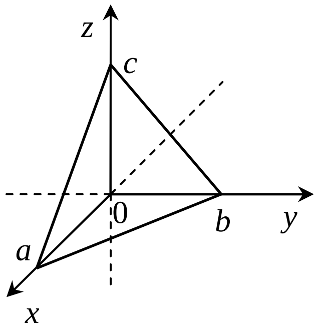


Рисунок 30

в) Рівняння площини, яка проходить через три дані точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$.

Введемо довільну точку площини $M(x;y;z)$ та вектори $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$, $\overrightarrow{M_1M}$ (рисунок 31).

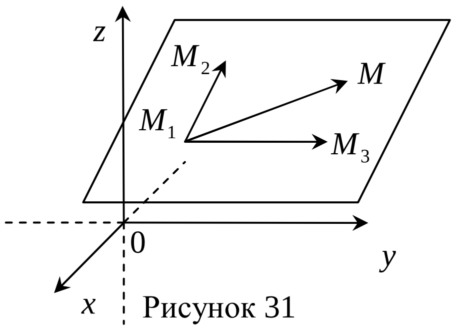


Рисунок 31

Ці вектори компланарні, тобто лежать в одній площині, отже, мішаний добуток цих векторів дорівнює нулю

$$\left(\overrightarrow{M_1M} \times \overrightarrow{M_1M_2}\right)\cdot \overrightarrow{M_1M_3} = 0 .$$

Отримали векторне рівняння площини. У скалярній формі (враховуючи (4.10)) це рівняння має вигляд

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 . \qquad (5.37)$$

Або

$$\begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}\cdot\left(x-x_1\right)-\begin{vmatrix} x_2-x_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}\cdot\left(y-y_1\right)+$$

$$+\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}\cdot\left(x-x_1\right). \qquad (5.38)$$

г) Відстань точки $\boldsymbol{M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)}$ від площини $\boldsymbol{Ax+By+Cz+D=0}$

Відстань від даної точки $\boldsymbol{M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)}$ до площини, яка задана загальним рівнянням і має нормаль $\vec{n}=\left(A,B,C\right)$, знаходиться за формулою

$$\boldsymbol{d}=\left|\frac{\boldsymbol{Ax_0+By_0+Cz_0+D}}{\sqrt{\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2+\boldsymbol{C}^2}}\right| \qquad (5.39)$$

д) Кут між площинами, які задані загальними рівняннями

$\left(P_1\right): A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ та

$\left(P_2\right): A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$,

можна знайти, як кут між їх нормалями $\vec{n}_1=\left(A_1;B_1;C_1\right)$ та $\vec{n}_2=\left(A_2;B_2;C_2\right)$, тобто

$$\varphi=\vec{n}_1\hat{\ }\vec{n}_2 .$$

Із скалярного добутку цих векторів

$(\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2) = |\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2| \cdot \cos(\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2)$ випливає, що

$$\cos(\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2) = \cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|},$$

або

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \qquad (5.40)$$

Паралельність площин (P_1) та (P_2) можна дослідити, перевіривши колінеарність нормалей цих площин, тобто $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$. Відомо, що колінеарні вектори мають пропорційні координати. Отже, **якщо для** $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ **виконується умова:**

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}, \qquad (5.41)$$

то відповідні їм площини $(P_1): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ та $(P_2): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ **паралельні.**

Площини $(\boldsymbol{P_1})$ **та** $(\boldsymbol{P_2})$ **перпендикулярні**, якщо перпендикулярні їх нормальні вектори $\vec{n}_1$ та $\vec{n}_2$, а це означає, що скалярний добуток

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0,$$

або в скалярній формі

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \qquad (5.42)$$

5.3.2 Рівняння прямої у просторі $\boldsymbol{R}^3$

а) Пряму у просторі розглядають, як **лінію перетину двох площин, заданих у загальній формі**

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}. \qquad (5.43)$$

б) Канонічне рівняння прямої в просторі будується так само, як і канонічне рівняння прямої на площині (5.18) з тією різницею, що точка M_0 має в просторі R^3 три координати – $M(x, y, z)$ і напрямний вектор теж має три координати $\vec{a} = (m, n, p)$. Отже, канонічне рівняння прямої (5.18) для R^3 буде мати вигляд

$$\boldsymbol{\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}} \; . \tag{5.44}$$

Зауважимо, що координати напрямного вектора прямої $\vec{a}$ можуть бути нульовими. Тому в (5.44) можуть стояти нулі в знаменниках. Їх сприймають тільки у розумінні відношення координат.

в) Параметричне рівняння прямої у просторі R^3 відрізняється від подібного рівняння прямої на площині (тобто у просторі $\boldsymbol{R^2}$) (5.19) додаванням до системи третьої координати. Виводиться теж з канонічного рівняння прямої, за параметр так само береться коефіцієнт пропорційності координат з канонічного рівняння:

$$\boldsymbol{\begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \\ z = pt + z_0 \end{cases}} \; . \tag{5.45}$$

г) Рівняння прямої, яка проходить через дві відомі точки $\boldsymbol{M_1(x_1; y_1; z_1)}$ та $\boldsymbol{M_2(x_2; y_2; z_2)}$ у просторі $\boldsymbol{R^3}$ теж є розширення рівняння (5.20) для прямої, яка проходить крізь дві точки в просторі $\boldsymbol{R^2}$.

$$\boldsymbol{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}} \; . \tag{5.46}$$

д) Кут між прямими $\boldsymbol{l_1}$ та $\boldsymbol{l_2}$ з напрямними векторами $\vec{a}_1(m_1, n_1, p_1)$ та $\vec{a}_2(m_2, n_2, p_2)$ знаходиться, як кут між напрямними векторами із їх скалярного добутку (аналогічно з простором $\boldsymbol{R^2}$)

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}} . \tag{5.47}$$

е) Умовою паралельності прямих у просторі R^3 є колініарність їх напрямних векторів $\vec{a}_1(m_1, n_1, p_1)$ та $\vec{a}_2(m_2, n_2, p_2)$ – пропорційність координат цих векторів

$$\frac{\boldsymbol{m_1}}{\boldsymbol{m_2}} = \frac{\boldsymbol{n_1}}{\boldsymbol{n_2}} = \frac{\boldsymbol{p_1}}{\boldsymbol{p_2}} . \tag{5.48}$$

ж) Умова ортогональності прямих – це ортогональність їх напрямних векторів, тобто рівність нулю скалярного добутку цих векторів

$\boldsymbol{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = 0}$ або

$$\boldsymbol{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0} . \tag{5.49}$$

з) Рівняння прямої, що проходить через точку $\boldsymbol{M_0(x_0; y_0; z_0)}$ перпендикулярно до площини $\boldsymbol{Ax+By+Cz+D=0}$.

Якщо пряма розміщена перпендикулярно до площини $\boldsymbol{Ax+By+Cz+D=0}$, то напрямний вектор прямої колінеарний нормальному вектору цієї площини $\vec{n}(A, B, C)$. Колінеарність векторів, як відомо, характеризує пропорційність їх координат. Побудуємо довільний напрямний вектор прямої, взявши за одну точку дану $\boldsymbol{M_0(x_0; y_0; z_0)}$, а за іншу – довільну точку цієї прямої $\boldsymbol{M(x, y, z)}$

$$\vec{a} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0).$$

Пропорційність координат $\vec{a}$ і $\vec{n}$ запишеться так

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C} . \tag{5.50}$$

Рівняння (5.50) і є рівняння шуканої прямої у просторі.

з) Кут φ між прямою та площиною знаходиться як кут між прямою і її проекцією на дану площину.

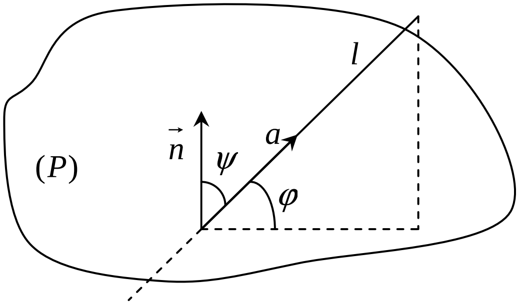


Рисунок 32

Нехай пряма задана канонічним рівнянням:

$$\boldsymbol{l}\text{:}\ \frac{\boldsymbol{x-x_0}}{\boldsymbol{m}}=\frac{\boldsymbol{y-y_0}}{\boldsymbol{n}}=\frac{\boldsymbol{z-z_0}}{\boldsymbol{p}}\ .$$

А площина – своїм загальним рівнянням

$$(\boldsymbol{P})\text{:}\ \boldsymbol{Ax+By+Cz+D=0}\ .$$

Якщо відоме рівняння площини (P), то відомі координати нормального вектора площини $\vec{n}=(A;B;C)$, а з рівняння прямої l – координати напрямного вектора $\vec{a}=(m;n;p)$.

Кут ψ між нормальним вектором площини $\vec{n}$ та вектором напрямку прямої $\vec{a}$ є доповненням кута φ до $\frac{\pi}{2}$

$$\psi=\left(\widehat{\vec{n},\vec{a}}\right)=\frac{\pi}{2}\pm\varphi .$$

Цей кут знаходимо з скалярного добутку векторів $\vec{n}$ і $\vec{a}$

$$\cos\psi=\frac{\vec{n}\cdot\vec{a}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{a}|}\ .$$

Оскільки $|\cos\psi|=\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}\pm\varphi\right)\right|=\sin\varphi$, то одержимо формулу для знаходження кута між прямою і площиною

$$\sin\varphi = \left|\frac{\vec{n}\cdot\vec{a}}{|\vec{n}||\vec{a}|}\right|, \qquad (5.51)$$

або в іншій формі

$$\sin\varphi = \left|\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}\right| . \qquad (5.51)$$

Розглянемо два окремі випадки

а) **пряма l та площина (P) паралельні** (рисунок 33).

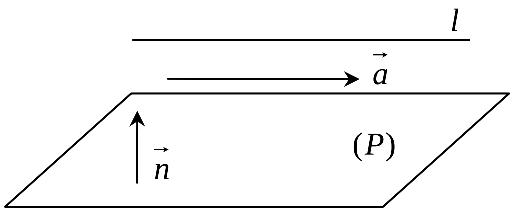


Рисунок 33

Отже, $\vec{n}\perp\vec{a}$, а це означає

$\vec{n}\cdot\vec{a}=0$,

або

$$Am+Bn+Cp=0 . \qquad (5.52)$$

б) **пряма l та площина (P) перпендикулярні** (рисунок 34).

Отже, $\vec{n}\parallel\vec{a}$, а це означає, що їх координати пропорційні

$$A/m = B/n = C/p . \qquad (5.53)$$

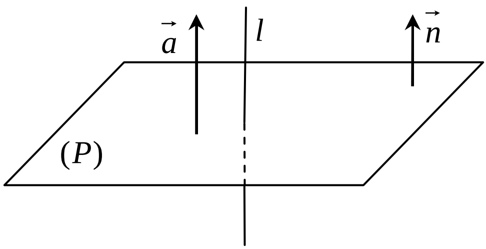


Рисунок 34

Приклад

Нехай задані координати вершин піраміди $A(4;-1;0)$, $B(-1;-2;1)$, $C(1;4;2)$ і $D(2;1;4)$.

– Побудувати піраміду $ABCD$.

– Знайти

1) рівняння ребра AB;

2) рівняння площини грані ABC;

3) площу грані ABC;

4) об'єм піраміди $ABCD$; рівняння висоти, опущеної з вершини D на грань ABC, та її довжину;

5) рівняння площини, яка проведена через вершину D паралельно грані ABC.

Розв'язання

Побудуємо піраміду (рисунок 35).

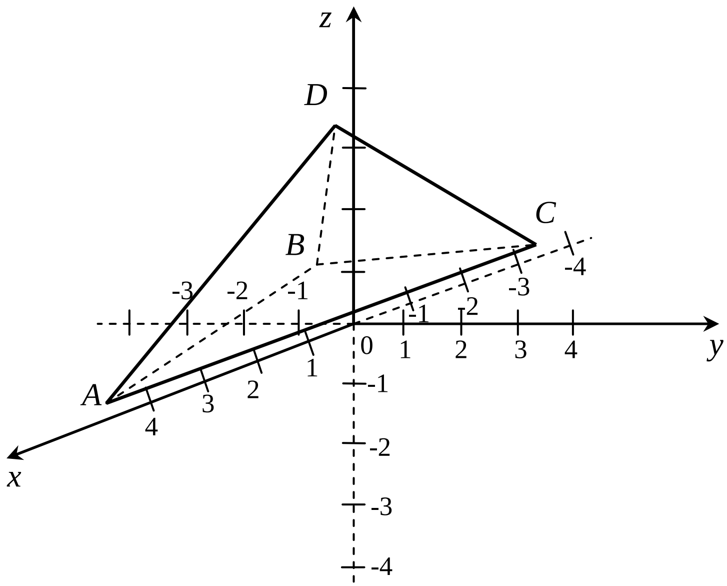


Рисунок 35

Введемо у розгляд вектори $\overrightarrow{AB}=(-5;-1;1)$, $\overrightarrow{AC}=(-3;5;2)$, $\overrightarrow{AD}=(-2;2;4)$.

1) Рівняння ребра AB запишемо, враховуючи (5.46):

$$\frac{x-4}{-1-4}=\frac{y-(-1)}{-2-(-1)}=\frac{z-0}{1-0},$$

отже,

$$\frac{x-4}{-5}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{1}.$$

2) Рівняння площини грані ABC запишемо, враховуючи (5.37):

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-(-1) & z-0 \\ -1-4 & -2-(-1) & 1-0 \\ 1-4 & 4-(-1) & 2-0 \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} x-4 & y+1 & z \\ -5 & -1 & 1 \\ -3 & 5 & 2 \end{vmatrix}=0.$$

Або, згідно з (5.38)

$$(x-4)\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}-(y+1)\cdot\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}+z\cdot\begin{vmatrix} -5 & -1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}=0,$$

$$(x-4)\cdot(-2-5)-(y+1)\cdot(-10+3)+z(-25-3)=0,$$

$$-7(x-4)+7(y+1)-28\cdot z=0, \quad \left|\cdot\left(\frac{1}{7}\right)\right.,$$

$$x-4-(y+1)+4z=0.$$

$x-y+4z-5=0$ - рівняння грані ABC.

Площу грані ABC знаходимо, використовуючи той факт, що площа трикутника дорівнює модулю векторного добутку векторів, на яких створений цей трикутник. Знайдемо векторний добуток векторів $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -5 & -1 & 1\\ -3 & 5 & 2\end{vmatrix}=\vec{i}A_{11}+\vec{j}A_{12}+\vec{k}A_{13}=$$

$$=\vec{i}M_{11}-\vec{j}M_{12}+\vec{k}M_{13}=\vec{i}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 5 & 2\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}-5 & 1\\ -3 & 2\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}-5 & -1\\ -3 & 5\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}\left(-2-5\right)+\overleftarrow{j}\left(-10+3\right)+\vec{k}\left(-25-3\right)=-7\vec{i}+7\vec{j}-28\vec{k}\,.$$

Отримали вектор $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=-7\vec{i}+7\vec{j}-28\vec{k}$.

Тоді площа трикутника ABC буде

$$S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{\left(-7\right)^2+7^2+\left(-28\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{7^2\left(1+1+16\right)}=\frac{1}{2}\cdot 7\sqrt{18}=\frac{7}{2}\sqrt{9\cdot 2}=$$

$$=\frac{7\cdot 3}{2}\sqrt{2}=\frac{21}{2}\sqrt{2}\ \ (\text{кв. од.})\,.$$

Об'єм піраміди обчислюємо за формулою (4.12)

$$V_{\text{пір}}=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}\right|\ .$$

Оскільки в попередньому пункті вже знайдено векторний добуток, то залишається знайти скалярний добуток $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ на $\overrightarrow{AD}$

$$\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}=\left(-7;7;-28\right)\cdot\left(-2;2;4\right)=$$
$$=-7\cdot\left(-2\right)+7\cdot 2+\left(-28\right)\cdot 4=$$
$$=7\cdot 2+7\cdot 2+7\cdot 4\cdot 4=14\cdot\left(1+1+8\right)=140\ .$$

Об'єм

$$V=\frac{1}{6}\cdot 140=\frac{70}{3}\ \ \left(\text{куб. од.}\right).$$

Рівняння висоти, яка опущена із вершини $D\left(2;1;4\right)$ на грань $ABC: x-y+4z-5$, знаходимо, використавши (5.50)

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-4}{4}$$ – рівняння висоти.

Довжину висоти знайдемо як відстань від точки $D(2;1;4)$ до площини ABC: $x-y+4z-5=0$, використавши (5.39)

$$d=\left|\frac{1\cdot 2-1\cdot 1+4\cdot 4}{\sqrt{1^2+(-1)^2+4^2}}\right|=\frac{17}{\sqrt{18}}=\frac{17}{3\sqrt{2}} \text{ (лін. од.)}.$$

Рівняння площини, яка проведена через точку $D(2;1;4)$ паралельно грані $ABC: x-y+4z-5=0$ знаходимо із умови ортогональності довільного вектора шуканої площини $\overrightarrow{DM}=(x-2;y-1;z-4)$ та нормального вектора грані ABC $\vec{n}=(1;-1;4)$.

$$\overrightarrow{DM}\cdot\vec{n}=0,$$

або

$$(x-2)\cdot 1+(y-1)\cdot(-1)+(z-4)\cdot 4=0,$$

$$x-2-y+1+4z-16=0,$$

$$x-y+4z-17=0.$$

Рівнянням шуканої площини буде $x-y+4z-17=0$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Барковський В. В., Барковська Н. В.* Вища математика для економістів – К.: ЦУЛ, 2002. 400 с.

2. *Беклемешев Д. В.* Курс аналитической геометри и линейной алгебры. – М.: Наука, 1980. 432 с.

3. *Бугров Я. С, Никольский С. М.* Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1980. 432 с.

4. *Бугров Я. С., Никольский С. М.* Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М.: Наука, 1980. 176 с.

5. *Кремер Н. Ш., Путко Б. А. і др.* Высшая математика для экономистов. – М.: «Банки и биржи» Издательское объединение «ЮНИТИ», 1988. 471 с.

Навчальне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Конспект лекцій
для студентів економічних спеціальностей
денної, заочної та вечірньої форм навчання

У трьох частинах
ЧАСТИНА 1

Відповідальний за випуск зав. кафедри прикладної математики і механіки д-р. фіз.-мат. наук, проф. Л. А. Фильштинський

Редактор Н. М. Мажуга

Комп'ютерне верстання Г. О. Кладієнко

Підп. до друку 18.03.2009, поз.
Формат 60×84/16. Папір офс. Гарнітура Times New Roman Cyr. Друк. офс.
Ум. друк. арк. Обл.-вид. арк.
Тираж 150 пр. Собівартість вид.
Зам. №

Видавництво СумДУ при Сумському державному університеті
40007, м. Суми, вул. Р.-Корсакова, 2
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру
ДК № 3062 від 17.12.2007.
Надруковано у друкарні СумДУ
40007, Суми, вул. Р.-Корсакова, 2.